This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06908100 2

A 8-1453 Phys. 17 Mei 1905

VERGELIJKEND OVERZICHT DER METHODEN TER BEPALING VAN AANTALLEN -:- VLAKKE KROMMEN. -:-

FRED. SCHUH.

VERGELIJKEND OVERZICHT

DER METHODEN TER BEPALING VAN

AANTALLEN VLAKKE KROMMEN.

VERGELIJKEND OVERZICHT

DER METHODEN TER BEPALING VAN

AANTALLEN VLAKKE KROMMEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Prof. I. J. DE BUSSY,

Hoogleeraar in de faculteit der Godgeleerdheid,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

op Woensdag 17 Mei 1905 des namiddags te 4 uur

IN DE AULA DER UNIVERSITEIT

DOOR

FREDERIK SCHUH,
geboren te Amsterdam.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

VERWIJDERD DOUBLET.

AMSTERDAM,
M. M. OLIVIER,
1905.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
744116
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1916 L

Aan de nagedachtenis mijner Ouders

en aan mijne Vrouw.

Aan het einde van mijn academischen studietijd gekomen is het mij een aangename plicht U allen, die mijn leermeesters geweest zijt, hartelijk dank te zeggen voor het opwekkende van U genoten onderricht. Uwe lessen zullen mij steeds in dankbare herinnering blijven.

Vooral grijp ik met vreugde deze gelegenheid aan om in het bijzonder aan U, Hooggeschatte Promotor, Hooggeleerde KORTEWEG, mijn oprechten dank te betuigen voor alles wat ik aan U verplicht ben. Aan Uw bezielend onderwijs, dat een onuitwischbaren indruk op mij gemaakt heeft, dank ik mijne bijzondere voorliefde voor geometrie. Door Uw toedoen ben ik in staat gesteld na afloop van mijne Amsterdamsche studiën die in het buitenland verder voort te zetten. De belangstelling, die Gij steeds in mijn werk getoond hebt, en den menigen goeden raad, die Gij mij bij de samenstelling van dit proefschrift zoo welwillend hebt verschaft, zal ik nimmer vergeten.

INHOUD.

pag.

INLEIDING . . . . . 1—18

EERSTE HOOFDSTUK.

CAYLEY'S *„quasi-geometrische" beschouwingen* . . 19—39

§ 1. Algemeene beschouwingen . . . . . 19—24
§ 2. „Quasi-geometrische" voorstelling van aanrakingsvoorwaarden . . . . . 24—29
§ 3. Toepassing op die gevallen, waarbij de gevraagde kromme een rechte of een kegelsnede is . . . . . 29—32
§ 4. Voorbeelden van toepassing der „quasi-geometrische" methode . . . . . 32—39

TWEEDE HOOFDSTUK.

Karakteristiekentheorie. . . . . . 40—74

§ 5. Stelling van CHASLES . . . . . 40—43
§ 6. Degeneratiebeschouwingen van ZEUTHEN . . . . . 44—47
§ 7. HALPHEN's wijziging van de stelling van CHASLES . . . 47—55
§ 8. SCHUBERT's uitbreiding van het karakteristiekenprobleem. 55—59
§ 9. Voorbeelden van figuren, waarvoor het karakteristiekenprobleem is opgelost . . . . . 59—64
§ 10. Theorema van CREMONA. Moduli der aanrakingsvoorwaarden . . . . . 64—70
§ 11. Samengestelde voorwaarden . . . . . 70—74

DERDE HOOFDSTUK.

Methoden, die aan de karakteristiekentheorie aansluiten. . . . . . pag. 75—111

§ 12. Methode van CAYLEY ter bepaling van het aantal kegelsneden, die aan een onsplitsbare vijf-voudige aanrakingsvoorwaarde voldoen. . . . . 75 - 81
§ 13. SCHUBERT's methode ter bepaling van aantallen krommen van hoogeren dan den tweeden graad. . . . . 82— 88
§ 14. ZEUTHEN's onderzoekingen omtrent krommensystemen van den vierden en hoogeren graad. . . . . 88— 95
§ 15. Onderzoekingen van CHASLES, FOURET, HALPHEN e. a. omtrent aantallen algebraïsche en transcendente krommen. . . . . 96—107
§ 16. Onderzoekingen van KREY omtrent aantallen algebraïsche krommen van den m^{den} graad. . . . . 107—111

VIERDE HOOFDSTUK.

Formule van DE JONQUIÈRES. . . . . 112—150

§ 17. Correspondentieprincipe van CHASLES en dat van CAYLEY en BRILL . . . . . 112—119
§ 18. Samengestelde correspondenties . . . . . 119—124
§ 19. Discussie der formule van DE JONQUIÈRES . . . . . 124—129
§ 20. Bewijs van de formule van DE JONQUIÈRES voor een algemeene rationale C_n. . . . . 129—132
§ 21. Bewijs van de formule van DE JONQUIÈRES voor een niet-rationale C_n met gewone dubbelpunten. . . . . 132—137
§ 22. Multipliciteit der oneigenlijke oplossingen 137 139
§ 23. Gevallen, waarin het aanrakingsprobleem geen oplossingen toelaat . . . . . 139—142
§ 24. Beperkte geldigheid der formule van DE JONQUIÈRES . 142—148
§ 25. Recursieformules van BRILL. . . . . 148—150

VIJFDE HOOFDSTUK.

pag.

Uitbreidingen van de formule van DE JONQUIÈRES. 151—197

§ 26. Gedrag der oplossingen tegenover CREMONA'sche transformaties . . . . . 151—162
§ 27. Verdere strekking der formule van DE JONQUIÈRES . . 162—170
§ 28. CAYLEY's uitbreiding van de formule van DE JONQUIÈRES. 170—177
§ 29. Uitbreiding van de formule van CAYLEY . . . . . 178—180
§ 30. Andere afleiding der in THEOREMA II genoemde formule. 181—185
§ 31. Verdere strekking der formule (45) . . . . . 186—198

Literatuuropgave . . . . . 199—215
Naamregister . . . . . 216—218

INLEIDING.

Komen in de vergelijking eener vlakke kromme ω niet homogeen optredende onafhankelijke parameters (of $\omega + 1$ homogene parameters) voor, dan noemen we het geheel der krommen, die men verkrijgt door aan die parameters alle mogelijke waarden toe te kennen, een *krommen-systeem van de* ω^{de} *orde* of een ∞^{ω}*-systeem.* Geeft een aan de krommen van het systeem opgelegde voorwaarde tot i onderling onafhankelijke vergelijkingen tusschen de parameters aanleiding, dan spreken we van een *i-voudige voorwaarde* of een *voorwaarde van de dimensie i*; we zeggen ook, dat de voorwaarde i *gegevens* vertegenwoordigt. Zijn nu aan de krommen van het systeem een of meer voorwaarden met een gezamenlijke dimensie ω opgelegd, dan is de kromme daardoor bepaald, maar in het algemeen meerduidig. Dan doet zich dus de volgende vraag voor:

Het aantal krommen van een systeem van de ω^{de} *orde te bepalen, die aan* ω *gegevens voldoen.*

Deze vraag heeft natuurlijk alleen dan beteekenis, als het systeem en de voorwaarden, die aan de krommen van het systeem zijn opgelegd, van dien aard zijn, dat het vinden der krommen, die aan de vraag voldoen (die we kortweg *oplossingen* noemen), afhankelijk gemaakt kan worden van het oplossen van een of meer *algebraïsche* vergelijkingen; in dat geval noemen we het probleem *algebraïsch.*

Hiervoor zal in de eerste plaats noodig zijn, dat we met een *algebraïsch systeem* te doen hebben, d. i. een systeem in welks vergelijking de parameters algebraïsch voorkomend gemaakt kunnen worden. We zeggen, dat de parameters *algebraïsch* voorkomen, als de vergelijking der kromme door het oplossen van algebraïsche vergelijkingen verkregen wordt zoodra de parameters gegeven zijn, dus *als bij ieder stel parameters eenzelfde eindig aantal krommen van het systeem behoort.* Verder zal om een algebraïsch probleem te krijgen nog noodig zijn, dat de voorwaarden *algebraïsch* zijn, d. w. z. *dat die voorwaarden tot algebraïsche betrekkingen tusschen de algebraïsch optredende parameters aanleiding geven.*

Met deze noodzakelijke beperkingen wordt dus de gestelde vraag:

PROBLEEM. *Het aantal krommen van een algebraïsch systeem van de ω^{de} orde te vinden, die aan ω algebraïsche gegevens voldoen.*

Hiervoor is echter niet noodig, dat de krommen van het systeem algebraïsch zijn. *Algebraïsche systemen van transcendente krommen* zijn het eerst in de beschouwingen opgenomen door FOURET in 1874 (**106** [1]) *Comptes Rendus t.* 78, **107** *Bull. de la Soc. Math. t.* 2; zie ook **108** *Bull. de la Soc. Math. t.* 2, **111** *idem t.* 5, **109** *Comptes Rendus t.* 82; verder nog HALPHEN **112** *Comptes Rendus t.* 81, **113** *Journal de Liouville* (3) *t.* 2). Verschillende door CHASLES voor systemen van algebraïsche krommen uitgesproken stellingen zijn door FOURET en HALPHEN uitgebreid tot systemen gevormd door de *integraalkrommen van algebraïsche differentiaalvergelijkingen.* (Meer hierover vindt men in § 15.)

In het volgende zullen we ons echter, tenzij het tegendeel uitdrukkelijk vermeld is, uitsluitend met *vlakke algebraïsche krommen* bezig houden. Wanneer nu in de vergelijking van het systeem van algebraïsche krommen eenige parameters ten getale van ω algebraïsch voorkomen, dan volgt daar niet uit dat die

---

[1]) De vet gedrukte nummers verwijzen naar de literatuuropgave, waar men nauwkeurig titel en vindplaats vermeld zal vinden.

parameters *rationaal* in de vergelijking optreden, zooals ten onrechte door DE JONQUIÈRES [1]) beweerd is. Wel kan de vergelijking van het systeem van de ω^{de} orde rationaal in de parameters gemaakt worden door invoering van meer dan ω (niet homogene) parameters. Op deze wijze kan de vergelijking steeds *lineair* in de parameters gemaakt worden, zooals b.v. onmiddellijk is in te zien door de coëfficienten van de algemeene vergelijking

---

[1]) DE JONQUIÈRES (12 *Journ. de Lionville* (2) *t.* 6) noemt een systeem van de eerste orde van krommen, waarvan er N door een willekeurig gegeven punt gaan, een *reeks krommen met den index N*. Op p. 114 en 115 l. c. leest men:

„*IV. Lemme.* Toutes les courbes C_n d'une série d'indice N peuvent être représentées par une équation $F(y\,x) = 0$ du degré n dont tous les coëfficients sont des fonctions algébriques entières et rationelles d'une indéterminée λ, qui s'élève, dans l'un d'entre eux au moins, au degré N, mais jaimais à un degré supérieur, etc." (Zie ook 98 p. 51). De onjuistheid hiervan is door CAYLEY (3 *Phil. Trans. Vol.* 158, *Coll. Pap. Vol.* 6, Annex n⁰. 1) het eerst opgemerkt. Komen b.v. in de vergelijking der kromme $i+1$ parameters homogeen en lineair voor, en bestaan er tusschen die parameters $i-1$ algebraïsche betrekkingen, waardoor men een krommensysteem van de eerste orde verkrijgt, dan kan men de $i+1$ parameters der krommen van het systeem opvatten als de homogene coördinaten van een punt, dat ligt op een meetkundige plaats van den graad N en van $i-1$ afmetingen, die gelegen is in een ruimte van i afmetingen. Alleen als die meetkundige plaats rationaal is, kunnen die $i+1$ parameters rationaal in één parameter λ worden uitgedrukt, waardoor na de substitutie de vergelijking van het systeem rationaal in één parameter wordt. Wel kan ook in het algemeen die vergelijking rationaal in één parameter gemaakt worden, maar niet zonder dat de graad der vergelijking in x en y een veelvoud van n, b.v. $q\,n$ wordt. Voor een bepaalde waarde van λ stelt de vergelijking dan het geheel van q krommen C_n voor, waarvan er in het algemeen slechts *één* tot het oorspronkelijke systeem behoort.

van den m^{den} graad als parameters op te vatten, waartusschen dan eenige algebraïsche betrekkingen bestaan. Die betrekkingen kunnen we dan echter ook onder de gegevens rangschikken, waardoor het aantal parameters der C_m $\frac{1}{2}\, m\,(m+3)$ wordt.

We kunnen het gestelde probleem dus ook als volgt formuleeren:

PROBLEEM. *Het aantal vlakke algebraïsche krommen van den graad m te vinden, die aan $\frac{1}{2}\, m\,(m+3)$ algebraïsche gegevens voldoen.*

In het *Eerste Hoofdstuk* bespreken we de door CAYLEY gebezigde „quasi-geometrische" voorstelling der voorwaarden door meetkundige plaatsen in meer-dimensionale ruimten. Beschouwt men n. l. de parameters van een kromme van een ∞^{ω}-systeem als de coördinaten van een punt in een ω-dimensionale ruimte, dan wordt iedere voorwaarde door een meetkundige plaats voorgesteld. De studie der krommen, die aan die voorwaarden voldoen, komt dan neer op een studie dier meetkundige plaatsen. Bij de toepassing dezer methode kan men echter op groote algebraïsche moeilijkheden stuiten.

We vermelden hier een tweetal resultaten, die we met behulp der CAYLEY'sche methode verkregen hebben (zie § 2):

Het aantal krommen van den m^{den} graad door $\frac{1}{2}\,(m-1)\,(m+4)$ gegeven punten, die op een gegeven kromme van den graad n en de klasse k een dubbelpunt hebben, bedraagt $3\,n\,(m-1)$.

Het aantal krommen van den m^{den} graad door $\frac{1}{2}(m-1)\,(m+4)$ gegeven punten, die een dubbelpunt hebben en elders een gegeven kromme van den graad n en de klasse k aanraken, bedraagt $3\,(m-1)\,\{k\,(m-1)+2nm\,(m-2)\}$.

In het *Tweede Hoofdstuk* behandelen we de karakteristiekentheorie. Hierbij worden de onderzoekingen van CHASLES, ZEUTHEN CREMONA, SCHUBERT en HALPHEN besproken. Bij de uitbreiding, die door SCHUBERT aan het karakteristiekenprobleem gegeven is, (§ 8), ben ik echter eenigszins van den door hem gevolgden weg afgeweken. Deze afwijking komt neer op de opstelling der ver-

gelijking (7) voor het aantal bc der van ω parameters afhangende figuren, die tegelijkertijd aan een i-voudige voorwaarde b en een $\omega-i$-voudige voorwaarde c voldoen. Deze vergelijking geeft na symbolische deeling door c de i-voudige karakteristiekenformule (die b in een aantal willekeurig gekozen i-voudige voorwaarden uitdrukt), na deeling door b de $\omega-i$-voudige karakteristiekenformule. In de paragrafen 9 en 10 hebben we gelegenheid de gevonden vergelijking op eenige gevallen toe te passen.

Uit de onderzoekingen van HALPHEN weet men echter, dat zelfs voor kegelsneden het karakteristiekenprobleem niet voor alle denkbare voorwaarden oplosbaar is, m. a. w. niet iedere voorwaarde in een eindig aantal karakteristieken is uit te drukken. Voor ingewikkelder figuren moet men volstaan met betrekkingen tusschen verschillende voorwaarden af te leiden, liefst zulke waarbij ingewikkelder voorwaarden in eenvoudigere (b.v. degeneratievoorwaarden) worden uitgedrukt. Hierbij blijft dan geheel in het midden gelaten of een dergelijke voorstelling ook voor andere dan de beschouwde voorwaarden gelukt, zoodat er nu van eigenlijke karakteristieken geen sprake is. De hierop betrekking hebbende onderzoekingen van ZEUTHEN, SCHUBERT en KREY vinden in het *Derde Hoofdstuk* een plaats, waar ook andere met de karakteristiekentheorie verband houdende onderzoekingen zijn ondergebracht. Ook enkele op transcendente krommen, algebraïsche en transcendente oppervlakken en ruimtekrommen en op algebraïsche vlakke krommen in de ruimte betrekking hebbende resultaten worden aldaar vermeld.

In de dan volgende hoofdstukken onderstellen we, dat de voorwaarden, die aan de C_m zijn opgelegd, uitsluitend *aanrakingsvoorwaarden* zijn. We onderscheiden hierbij twee soorten van aanrakingsvoorwaarden, t. w. voorwaarden van *vaste* en van *vrije* aanraking.

De voorwaarde van *vaste aanraking* vordert, *dat de C_m aan een gegeven kromme in een gegeven punt een aanraking van voorgeschreven*

orde vertoont, terwijl de voorwaarde van *vrije aanraking* vordert, *dat C_m aan een gegeven kromme in een niet-gegeven punt een aanraking van voorgeschreven orde volbrengt.*

Is de vaste aanraking *nul-voudig* [1]), dan behelst de voorwaarde, dat C_m door een gegeven punt van een gegeven kromme gaan moet. Van die gegeven kromme behoeft men dan behalve het gegeven punt niets te kennen. Men heeft dus:

De voorwaarde door een gegeven punt F te gaan is een voorwaarde van vaste nul-voudige aanraking. Deze voorwaarde geeft tot één lineaire betrekking tusschen de parameters aanleiding [2]).

Hierbij denken we ons als parameters de coëfficienten der algemeene vergelijking van den m^{den} graad. Het punt F noemen we een *gegeven punt.*

Is de vaste aanraking meervoudig, dan behoeft men de gegeven kromme ook niet geheel te kennen. Evenmin is het noodig, dat de gegeven kromme algebraïsch is. Om echter bij een transcendente kromme van een aanraking van bepaalde orde te kunnen spreken, is het noodig *dat de gegeven kromme in de buurt van het gegeven punt door een convergeerende reeksontwikkeling kan worden voorgesteld, waarvan alle exponenten rationaal zijn met een eindigen gemeenschappelijken noemer.* Daar dit blijkens PUISEUX' onderzoekingen (170 *Journ. de Liouv.* (1) *t.* 15) voor ieder punt eener algebraïsche kromme het geval is [3]), kunnen we een dergelijk punt eener transcendente kromme een *algebraïsch punt* noemen.

---

[1]) Onder een *k-voudige aanraking* of *aanraking van de k^{de} orde* verstaan we een aanraking, waarbij $k+1$ snijpunten in het raakpunt samenvallen. Ook noemen we zulk een aanraking wel $k+1$-*puntig.*

[2]) Hieruit volgt, dat in het algemeen de C_m door de voorwaarde door $\frac{1}{2}m(m+3)$ gegeven punten te gaan ondubbelzinnig bepaald is.

[3]) Gaan er door het beschouwde punt meerdere takken, dan krijgt men meerdere reeksontwikkelingen. We onderstellen dan echter, dat de voorwaarde van vaste aanraking slechts op één dier takken betrekking heeft.

Eenvoudigheidshalve nemen we aan, dat dit algebraïsche punt *van den eersten graad* of *lineair* is, d.w.z. dat de gegeven kromme in de buurt van dit punt kan worden voorgesteld door één enkele convergente reeksontwikkeling van y naar opklimmende *geheele* positieve machten van x, als ten minste de raaklijn in het gegeven punt (dat we als oorsprong kiezen) niet evenwijdig loopt aan de Y-as van het Cartesiaansche coördinatenstelsel (hetgeen door de keus van het coördinatenstelsel steeds vermeden kan worden). Is nu een k-voudige aanraking in het gegeven punt voorgeschreven, dan vindt men de betrekkingen, waartoe dit aanleiding geeft, door de gegeven ontwikking van y naar x in de algemeene vergelijking van C_m te substitueeren en de coëfficienten van $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^k$ nul te stellen. *Dit geeft* $k+1$ *lineaire betrekkingen tusschen de parameters.* Van de gegeven reeksontwikkeling behoeft men de coëfficienten van x^{k+1} en hoogere machten van x niet te kennen.

Daar een k-voudige aanraking een doorsnijding in $k+1$ samenvallende punten beteekent, kan men de voorwaarde van vaste k-voudige aanraking opvatten als ontstaan te zijn door het samenvallen van $k+1$ gegeven punten, die langs eenzelfde kromme tot een lineair punt dier kromme genaderd zijn. Echter ook de voorwaarde van vaste aanraking in een niet-lineair punt (*superlineair* volgens CAYLEY 171) geeft tot eenige *lineaire* betrekkingen tusschen de parameters aanleiding en kan ontstaan gedacht worden door het samenvallen van even zoovele gegeven punten in een willekeurig algebraïsch punt eener gegeven kromme. We vinden dus:

Een voorwaarde van vaste aanraking komt neer op het moeten gaan door één of meer samenvallende gegeven punten en geeft tot even zoovele lineaire betrekkingen tusschen de parameters aanleiding.

De voorwaarden van vaste aanraking of, wat op hetzelfde neerkomt, van het gaan door al of niet samenvallende gegeven punten kunnen worden uitgebreid tot *willekeurige lineaire betrekkingen tusschen de parameters,* hetgeen dan echter geen aanra-

kingsvoorwaarden meer zijn. De krommen, die aan die lineaire betrekkingen voldoen, noemen we te zamen een *lineair stelsel.* Is dit lineaire stelsel van hoogere dan de eerste orde, dan is er in het algemeen van het gaan door vaste punten (dus van gegeven punten) geen sprake. In bijzondere gevallen kunnen er natuurlijk wel *vaste punten* in allerlei aantal [1]) optreden. Om ons eenvoudiger te kunnen uitdrukken, houden we toch meestal aan het gaan door gegeven punten vast; bij alle onderzoekingen kan dan echter steeds het gaan door die gegeven punten, welke willekeurig gelegen ondersteld worden, vervangen worden door even zoovele willekeurige lineaire betrekkingen.

Bij de voorwaarde van *vrije* aanraking moet de gegeven kromme natuurlijk in haar geheel bekend zijn. Verder moet ze *algebraïsch* zijn wil ze een algebraïsche aanrakingsvoorwaarde opleveren. *De voorwaarde van vrije a-voudige aanraking is a-voudig en geeft a niet-lineaire betrekkingen tusschen de parameters.*

Zijn aan C_m meerdere voorwaarden van vrije aanraking opgelegd, dan onderstellen we, dat die alle op dezelfde gegeven kromme C_n van den n^{den} graad betrekking hebben [2]). Het probleem, dat we gaan bespreken, is dus het volgende:

AANRAKINGSPROBLEEM. *Het aantal krommen C_m te bepalen, die een gegeven C_n in t niet-gegeven punten resp. a-, b-, c- enz.-voudig aanraken en door*

$$f = \tfrac{1}{2} m (m + 3) - (a + b + c + \ldots)$$

gegeven punten gaan.

Een *oplossing* van dit probleem is een door de gegeven punten

---

[1]) Natuurlijk beneden een zekere grens.

[2]) Het geval, dat de verschillende aanrakingsvoorwaarden op verschillende gegeven krommen betrekking hebben, is eenvoudiger en uit het hier behandelde gemakkelijk af te leiden. De gegeven krommen der vaste aanrakingen denken we ons echter meestal van de gegeven kromme der vrije aanrakingen verschillend.

gaande kromme C_m, waarbij er onder de mn snijpunten met C_n t groepen voorkomen, waarin resp. $a+1$, $b+1$, $c+1$, . . . snijpunten vereenigd liggen, onverschillig of die samenvallende snijpunten soms in een singulier punt van C_n of in een gegeven punt vallen. Men kan echter twee soorten van oplossingen als *wezenlijke* en *onwezenlijke* oplossingen van elkander onderscheiden. Hiervoor geldt het volgende kenmerk:

Wezenlijke oplossingen zijn oplossingen, die bestand zijn tegen CREMONA'*sche transformaties.*

Onder de *multipliciteit* van een oplossing C_m verstaan we het aantal gevraagde krommen, die in C_m vereenigd gelegen gedacht moeten worden. Het kan nu gebeuren, dat de multipliciteit eener oplossing door een birationale (CREMONA'sche) transformatie verminderd kan worden, zonder dat men daardoor die oplossing kan doen verdwijnen. In dat geval liggen er in dezelfde oplossing eenige wezenlijke en onwezenlijke oplossingen vereenigd, waarvan we de aantallen als de *wezenlijke* en de *onwezenlijke multipliciteit* onderscheiden. [1]) De wezenlijke multipliciteit is de kleinste waarde, waartoe de multipliciteit door een CREMONA'sche transformatie gereduceerd kan worden.

Wil een C_m onder de wezenlijke oplossingen voorkomen, dan is daarvoor noodig en voldoende, *dat alle vrije aanrakingen wezenlijk worden uitgevoerd.* We zeggen, dat een a-voudige vrije aanraking wezenlijk wordt uitgevoerd, *als* $a+1$ *beweeglijke snijpunten van* C_m *en* C_n *langs eenzelfden tak van* C_n *in den oorsprong van dien tak zijn samengevallen.* Onder de *beweeglijke snijpunten* van C_m en C_n verstaan we *de snijpunten, die met* C_m (waarvan we steeds onderstellen, dat ze door de gegeven punten gaat) van plaats veranderen, dus *de buiten de vaste punten* [2]) *vallende snijpunten van* C_n *met een*

---

[1]) De som daarvan is dus gelijk aan de *totale multipliciteit.*

[2]) D.w.z. de gegeven punten en de mogelijk daaruit voortvloeiende andere vaste punten van het stelsel der door de gegeven punten gaande krommen C_m.

willekeurige door de gegeven punten gaande C_m. Onder een *tak* van C_n verstaan we *het geheel der punten, wier coördinaten door eenzelfde* PUISEUX'*sche reeksontwikkeling worden voorgesteld,* terwijl we onder den *oorsprong* van den tak verstaan *het punt, waarnaar we de ontwikkeling hebben uitgevoerd.* Hiermede is echter niet gezegd, dat een oplossing, die alle vrije aanrakingen wezenlijk uitvoert, ook niet nog voor eenige onwezenlijke oplossingen tellen kan.

Een oplossing is uitsluitend onwezenlijk, zoodra een der vrije aanrakingen onwezenlijk wordt uitgevoerd, b.v. als een a-voudige vrije aanraking zoodanig wordt uitgevoerd, dat er $a+1$ snijpunten van C_m en C_n in een gegeven punt samenvallen, of zoodanig dat C_m door een gewoon dubbelpunt van C_n gaat en daar een der takken door het dubbelpunt $a-1$-voudig aanraakt.

De wezenlijke oplossingen kunnen weer in *eigenlijke* en *oneigenlijke* oplossingen onderscheiden worden. We noemen een oplossing *eigenlijk, als alle vrije aanrakingen buiten de gegeven punten aan lineaire takken van* C_n *worden uitgevoerd, zoodanig dat* C_m *in de raakpunten lineaire (gewone) punten heeft*; in alle andere gevallen noemen we de oplossing *oneigenlijk.* Hieruit volgt, dat iedere uitsluitend onwezenlijke oplossing een oneigenlijke oplossing is, maar niet omgekeerd.

Een oneigenlijke oplossing is uitsluitend onwezenlijk, als een der aanrakingen in een gewoon dubbelpunt van C_n of in een gegeven punt [1]) wordt uitgevoerd; uitsluitend wezenlijk, als het oneigenlijk zijn der oplossing alleen veroorzaakt wordt doordat C_m in het raakpunt een singulier punt heeft [2]). Eenzelfde oneigenlijke

---

[1]) Als ten minste in het gegeven punt, waarin de a-voudige aanraking wordt uitgevoerd, minder dan $a+1$ *beweeglijke* snijpunten samenvallen.

[2]) Aan de vraag b.v. naar de kegelsneden door vier gegeven twee aan twee samenvallende punten, die een gegeven C_n aanraken, voldoet de dubbeltellende verbindingslijn der gegeven punten en wel n maal, daar

oplossing kan echter ook tegelijkertijd voor eenige wezenlijke en voor eenige onwezenlijke oplossingen tellen. Dit doet zich b.v. voor als een vrije aanraking in een keerpunt van C_n wordt uitgevoerd (mits ook de overige aanrakingen wezenlijk worden uitgevoerd). [1])

Terwijl een oneigenlijke oplossing meestal meermalen geteld moet worden en dus een zekere *multipliciteit* bezit, zijn de eigenlijke oplossingen in het algemeen enkelvoudig. In bijzondere gevallen kunnen er echter ook eigenlijke oplossingen samenvallen, n.l. als er een aanraking van hoogere orde wordt uitgevoerd dan is voorgeschreven.

Het totale aantal eigenlijke en oneigenlijke oplossingen is natuurlijk gelijk aan het aantal oplossingen voor het geval, dat de gegeven C_n punt-algemeen is en de gegeven punten willekeurig liggen. Wanneer er nu in bijzondere gevallen oneigenlijke (hetzij wezenlijke of onwezenlijke) oplossingen ontstaan, heeft men het aantal daarvan (ieder met een behoorlijke multipliciteit) van het totale aantal af te trekken om dat der eigenlijke oplossingen over te houden. Aan het gestelde aanrakingsprobleem sluit zich dus het volgende aan:

MULTIPLICITEITSPROBLEEM. *Indien er door singulariteiten der gegeven kromme of door de bijzondere ligging der gegeven punten onderling of ten opzichte der gegeven kromme eigenlijke oplossingen samenvallen of oneigenlijke oplossingen ontstaan, het aantal dier samenvallende eigenlijke oplossingen en dat der in mindering te brengen oneigenlijke oplossingen te bepalen.*

---

in ieder snijpunt een oneigenlijke aanraking wordt uitgevoerd. Dit zijn n uitsluitend wezenlijke oplossingen.

[1]) Zoo telt b.v. bij de vraag naar de raaklijnen van uit een willekeurig punt aan C_n te trekken de verbindingslijn met een keerpunt voor *één* wezenlijke en *twee* onwezenlijke oplossingen; bij de vraag naar de buigraaklijnen telt een keerraaklijn voor *twee* wezenlijke en *zes* onwezenlijke oplossingen.

Houdt men het aanrakingsprobleem zoo algemeen mogelijk en laat men tegelijkertijd alle denkbare bijzonderheden in de gegeven kromme en in de ligging der gegeven punten toe, dan wordt het multipliciteitsprobleem uiterst ingewikkeld, waarom het dan ook nooit in die algemeenheid behandeld is, waarin we het boven geformuleerd hebben. Om het vraagstuk te kunnen behandelen moet men of het eene of het andere opofferen, dus òf het aanrakingsprobleem algemeen houden en slechts eenvoudige bijzonderheden in de gegeven kromme en de ligging der gegeven punten toelaten, òf het aanrakingsprobleem vereenvoudigen, hetgeen dan een dieper doordringen in de wijzigingen, die door het optreden van hoogere singulariteiten bij de gegeven kromme ontstaan, mogelijk maakt. In dit proefschrift doen we alleen het eerste, terwijl we het laatste voor een andere publicatie voorbehouden.

In het *Vierde Hoofdstuk* bespreken we de voor de oplossing daarvan toegepaste correspondentiebeginsels van CHASLES en van CAYLEY en BRILL en de onderzoekingen van DE JONQUIÈRES.

Met behulp van het CHASLES'sche correspondentiebeginsel voor rationale krommen is het aanrakingsprobleem door DE JONQUIÈRES (**161** *Crelle's Journal Bd.* 66) opgelost voor een gegeven kromme C_n, die slechts gewone dubbelpunten bezit, in de onderstelling, dat de gegeven punten (waarvan er onderling samen kunnen vallen) buiten C_n of in gewone punten van C_n liggen. Het door hem verkregen aantal eigenlijke oplossingen wordt door de vergelijking (38) aangegeven, terwijl men de afleiding van DE JONQUIÈRES met een kleine vereenvoudiging in de paragrafen 20 en 21 vinden zal.

De formule van DE JONQUIÈRES geldt echter alleen *zoolang het aantal wezenlijke oplossingen eindig is*, waarbij men onder een oplossing *de gevraagde* C_m *te zamen met de groep der raakpunten* te verstaan heeft.

Het aantal oplossingen is *nul* als het aantal in de raakpunten en in de gegeven punten vallende snijpunten van C_m en C_n grooter dan $m\,n$ is, dus voor

$$(a+b+c+\ldots)+p+t>m\,n.$$

In dat geval kunnen er echter toch nog (hoewel oneigenlijke) oplossingen zijn, waarbij dan C_m geheel of gedeeltelijk uit C_n bestaat. Dit geval doet zich voor als er door de q buiten C_n gelegen gegeven punten een C_{m-n} mogelijk ls. Is dit niet het geval, dan laat het probleem in het geheel geen oplossingen (ook geen oneigenlijke) toe; in § 23 hebben we het dan *absoluut onmogelijk* genoemd. Daaromtrent zullen we bewijzen:

Bij een absoluut onmogelijk aanrakingsprobleem levert de formule van DE JONQUIÈRES *steeds nul oplossingen en behoudt dus voor dat geval haar geldigheid.*

Verlangt het aanrakingsprobleem meer dan $m\,n$ snijpunten, maar laat het geheel of gedeeltelijk uit C_n bestaande oplossingen toe, dan noemen we het probleem *relatief onmogelijk.* De formule van DE JONQUIÈRES kan dan zoowel een positieve of negatieve waarde als nul opleveren, dus:

Voor een relatief onmogelijk aanrakingsprobleem verliest de formule van DE JONQUIÈRES *haar beteekenis.*

Om een *mogelijk* aanrakingsprobleem te verkrijgen, moet dus steeds ondersteld worden, dat

$$(a+b+c\ldots)+p+t\leq mn$$

is. Ook dan kan het geval zich voordoen, dat er een C_m aan de vraag voldoet, die geheel of gedeeltelijk uit C_n bestaat. *In dat geval is iedere groep van t willekeurig op C_n aangenomen punten als een groep van contactpunten te beschouwen. Er bestaan dan geen geïsoleerde oplossingen en in het algemeen ook geen eigenlijke oplossingen.* We noemen de vraag als vraag naar de contactpunten dan *absoluut onbepaald. Ook voor dat geval verliest de formule van* DE JONQIÈRES *haar beteekenis.*

Echter ook als het aanrakingsprobleem mogelijk en niet absoluut onbepaald is, kan het gebeuren dat er oneigenlijke oplossingen optreden, waarmede bij de afleiding der formule geen

rekening gehouden is, ook dan als de gegeven C_n en de ligging der gegeven punten geheel willekeurig zijn. Dit doet zich voor als er krommen C_m aan de vraag voldoen, die geheel of gedeeltelijk uit samenvallende deelen bestaan.

De Jonquières (l. c. p. 303—306) vindt, dat dergelijke gedegenereerde en dus oneigenlijke oplossingen niet voorkomen, *als het aantal buiten C_n gelegen gegeven punten grooter is dan een bepaalde waarde* („limite favorable"). Alleen in dat geval is de formule van de Jonquières toe te passen.

Ligt het aantal buiten C_n gelegen gegeven punten beneden die grens, dan is het aantal eigenlijke oplossingen uit de formule van de Jonquières door het aanbrengen eener *correctie* te bepalen, zoolang het aantal gedegenereerde oplossingen eindig is. Men heeft dan slechts die gedegenereerde oplossingen met de hun toekomende multipliciteit in mindering te brengen. Als voorbeeld diene de vraag naar de 5-voudig aanrakende kegelsneden, waaraan de dubbeltellende buigraaklijnen voldoen.

Het aantal eigenlijke oplossingen is echter niet meer uit de formule van de Jonquières af te leiden, als het aantal oneigenlijke oplossingen oneindig groot is. Dit doet zich b.v. voor bij de vraag naar de vijfmaal enkelvoudig aanrakende kegelsneden, waaraan iedere in twee samenvallende rechten gedegenereerde kegelsnede voldoet.

In het *Vijfde Hoofdstuk* bespreken we de uitbreidingen van de formule van de Jonquières. Deze formule en ook de afleiding gaan onveranderd door als de gegeven kromme meervoudige punten met al of niet elkaar rakende takken bezit, mits die kromme slechts geen *superlineaire takken* [1]) heeft, en ook als er

---

[1]) Hieronder verstaat Cayley (171 *Quart. Journ. of Math. Vol.* 7, *Coll. Papers Vol.* 5) takken, wier Puiseux'sche reeksontwikkelingen *gebroken* exponenten bevatten. Het eenvoudigste voorbeeld hiervoor leveren takken met een gewoon keerpunt.

in die meervoudige punten gegeven punten vallen. Men moet dan echter aan de in de formule van DE JONQUIÈRES voorkomende grootheid p niet de beteekenis toekennen, die DE JONQUIÈRES er aan hecht, n.l. *het aantal op C_n gelegen gegeven punten,* maar daar onder verstaan *het aantal vaste snijpunten* [1]) *van C_m en C_n,* d. z. die snijpunten, die voor alle door de gegeven punten gaande krommen C_m dezelfde zijn. Dan wijst $nm-p$ het aantal *beweeglijke snijpunten* aan, dat we door n' voorstellen.

Dezelfde formule wijst echter bij een kromme C_n met hoogere singulariteiten nog steeds het aantal *wezenlijke oplossingen* aan, daar zulk een kromme volgens een stelling van NOETHER (172 *Math. Ann. Bd.* 9) door een CREMONA'sche transformatie in een kromme kan worden omgezet, die slechts meervoudige punten met gescheiden raaklijnen bezit en waarop dus de formule van DE JONQUIÈRES van toepassing is.

Deze formule heeft dus de volgende algemeenere strekking (THEOREMA I, § 27):

Het aantal $(a, b, c, \ldots)$ der wezenlijke oplossingen (die niet alle van elkaar behoeven te verschillen) van het aanrakingsprobleem bedraagt, zoolang dit eindig is:

$$\frac{1}{p}(a+1)(b+1)(c+1)\ldots\left\{\begin{array}{l} [n'-(a+b+c+\ldots)\quad]^t \\ +[n'-(a+b+c+\ldots)-1]^{t-1}(a+b+c+\ldots)[g]^1 \\ +[n'-(a+b+c+\ldots)-2]^{t-2}(ab+ac+bc+\ldots)[g]^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +[n'-(a+b+c+\ldots)-t]^0 \quad (a\,b\,c\ldots\ldots)[g]^t \end{array}\right\},$$

---

[1]) De vaste snijpunten van C_m en C_n liggen in de op C_n gelegen gegeven punten en de mogelijk daaruit volgende andere vaste punten, die op C_n liggen. Ook al zijn laatstgenoemde punten niet aanwezig kan er verschil ontstaan door de aan de gegeven punten toe te kennen multipliciteit. Valt b.v. een gegeven punt in een dubbelpunt van C_n, dan is dit *één* op C_n gelegen gegeven punt, maar telt voor *twee* vaste snijpunten

welke bijzonderheden zich ook in de gegeven kromme of in de ligging der gegeven punten mogen voordoen. Hierin stelt g het geslacht van C_n, n' het aantal beweeglijke snijpunten van C_m en C_n voor, terwijl $[x]^i$ een afkorting is voor $x(x-1)(x-2)\ldots(x-i+1)$.[1] *Verder stelt P het aantal malen voor, waarop de onderling gelijke der aanrakingsindices $a, b, c, \ldots$ gepermuteerd kunnen worden.*

Zijn alle aanrakingsindices verschillend dan is dus $P=1$. Zijn er α indices onderling gelijk, β andere eveneens, enz., dan is $P=[\alpha]^\alpha[\beta]^\beta\ldots$.

Zooals men ziet zijn alle in deze formule voorkomende grootheden *rationaal-invariant*, d. w. z. veranderen niet bij birationale transformaties.

De formule van DE JONQUIÈRES stelt echter niet het aantal *eigenlijke* oplossingen voor als de gegeven C_n superlineaire takken heeft. In dat geval moeten de wezenlijke maar oneigenlijke oplossingen in mindering gebracht worden. Voor het geval, dat de gegeven kromme C_n behalve dubbelpunten slechts gewone keerpunten bezit en geen der gegeven punten op C_n ligt ($p=0$), is deze uitbreiding volbracht door CAYLEY (3 *Phil. Trans. Vol.* 158, *Coll. Papers Vol.* 6). De vergelijking (43) geeft voor het geval, dat $t=4$ is (waaruit echter gemakkelijk de samenstelling der formule in het algemeene geval te zien is), het resultaat, waartoe CAYLEY gekomen is[2]). De afleiding van CAYLEY, die we in § 28 geschetst hebben, komt neer op het oplossen van functionaalvergelijkingen met drie veranderlijken. Ze geeft tot zeer ingewikkelde berekeningen aanleiding, die CAYLEY alleen voor de eenvoudigste gevallen ($t=1$ of 2) werkelijk uitvoert.

---

van C_m en C_n. Het omgekeerde doet zich voor, als twee gegeven punten in een gewoon punt van C_n zoodanig samenvallen, dat hun verbindingslijn geen raaklijn aan C_n is.

[1]) Zoodat dus $[x]^0=1$ is en $[x]^i$ voor $i>x$ de waarde nul aanneemt.

[2]) De oplossingen, waarvan deze vergelijking het aantal geeft, zijn alleen de *eigenlijke*.

In § 29 hebben we de formule van CAYLEY uitgebreid tot het geval, waarbij er eenige gegeven punten op de gegeven kromme vallen, hetzij in gewone punten, dubbelpunten of keerpunten dier kromme. Hierbij kunnen er ook meerdere gegeven punten op de gegeven kromme samenvallen, waarbij we voorloopig onderstellen, dat dit samenvallen niet in een keerpunt van C_n geschiedt. De eenige wijziging, die de formule van CAYLEY daardoor ondergaat, bestaat daarin, dat mn door $mn - p = n'$ (het aantal beweeglijke snijpunten van C_m en C_n) en $\varkappa$ door $\varkappa'$ moet worden vervangen. Hierin beteekent $\varkappa'$ (als we eenvoudigheidshalve onderstellen, dat er geen twee of meer gegeven punten in een keerpunt van C_n samenvallen) het aantal der buiten de gegeven punten gelegen keerpunten van C_n.

Op deze wijze hebben we gevonden (THEOREMA II, § 29):

Gegeven zij een algebraïsche vlakke kromme C_n van het geslacht g, die geen andere superlineaire takken dan takken met keerpunt bezit, en $\frac{1}{2}m\,(m+3) - (a+b+c+\ldots)$ gegeven punten, waarvan er geen twee of meer in een keerpunt van C_n samenvallen. Het aantal $(a, b, c, \ldots)$ der door de gegeven punten gaande krommen C_m, die aan C_n buiten de keerpunten t vrije wezenlijke aanrakingen van de orden $a, b, c, \ldots$ vertoonen, wordt (als we eenvoudigheidshalve $t = 3$ onderstellen) gevonden uit:

$$
\begin{aligned}
P(a,b,c) = (a+1)(b+1)(c+1) \Big\{ & [n'-(a+b+c)]^3 \\
& + [n'-(a+b+c)-1]^2 (a+b+c)\,[g]^1 \\
& + [n'-(a+b+c)-2]^1 (ab+ac+bc)\,[g]^2 \\
& + abc\,[g]^3 \Big\} \\
- [\Sigma\, a\,(b+1)(c+1) \Big\{ & [n'-(a+b+c)-1]^2 \\
& + [n'-(a+b+c)-2]^1 (b+c)\,[g]^1 \\
& bc\,[g]^2 \Big\} \Big]\,[\varkappa']^1 \\
+ [\Sigma\, ab\,(c+1) \Big\{ & [n'-(a+b+c)-2]^1 \\
& + c\,[g]^1 \Big\} \Big]\,[\varkappa']^2 \\
- [a\,b\,c & \Big]\,[\varkappa']^3,
\end{aligned}
$$

waarin $\varkappa'$ het aantal buiten de gegeven punten gelegen keerpunten van C_n voorstelt.

De CAYLEY'sche methode der functionaalvergelijkingen kan ook voor de afleiding van deze formule gebezigd worden. In § 30 hebben we echter een andere meer directe afleiding gegeven, door uit te gaan van de formule van DE JONQUIÈRES en het aantal oneigenlijke oplossingen af te tellen, die ontstaan wanneer eenige dubbelpunten der gegeven kromme in keerpunten veranderen. Deze weg is m. i. eenvoudiger dan die van CAYLEY, daar de berekeningen, ook dan als t willekeurig gehouden wordt, geheel tot een eind gevoerd kunnen worden. Bovendien kunnen zoo ook gevallen onderzocht worden, waarbij zich nog hoogere bijzonderheden voordoen, in welke gevallen de methode der functionaalvergelijkingen bezwaarlijk meer toepasbaar is.

Op deze wijze is ons gebleken, dat de in THEOREMA II genoemde formule ook als er meerdere gegeven punten in eenzelfde keerpunt van C_n samenvallen in een groot aantal gevallen onveranderd doorgaat. Van de manier, waarop de gegeven punten in het keerpunt samenvallen, hangt het dan af of het keerpunt als een buiten de gegeven punten dan wel als een in een gegeven punt gelegen keerpunt behandeld moet worden. Vallen b.v. twee gegeven punten in een keerpunt van C_n samen, dan doet het eerste geval zich voor als de verbindingslijn der gegeven punten van de keerraaklijn verschilt, het tweede geval als die verbindingslijn met de keerraaklijn samenvalt. Deze beschouwingen zijn gemakkelijk uit te breiden tot het geval, waarbij de gegeven punten door willekeurige lineaire betrekkingen zijn vervangen. Het resultaat daarvan wordt door THEOREMA III (§ 31) aangegeven.

Ten aanzien van de gevonden formule gelden dergelijke bemerkingen omtrent het geldigheidsbereik als bij de formule van DE JONQUIÈRES. In die gevallen, waarin het aantal gedegenereerde oplossingen eindig is, kan men door het aanbrengen eener correctie bereiken, dat de formule het aantal eigenlijke oplossingen blijft voorstellen.

EERSTE HOOFDSTUK.

CAYLEY'S „QUASI-GEOMETRISCHE" BESCHOUWINGEN.

---

§ 1. *Algemeene beschouwingen.*

Komen in de vergelijking van een vlakke kromme ω parameters voor, dan beschouwt CAYLEY [1]) (**3** *Phil. Trans. Vol.* 158, *Coll. Pap. Vol.* 6) deze parameters als de coördinaten van een punt P in een ω-dimensionale ruimte $R^{(\omega)}$. CAYLEY noemt P het *parametrische punt* („parametric point"). Is aan de kromme een *k-voudige voorwaarde* of een *voorwaarde van de k^{de} dimensie* opgelegd, dan beteekent dit voor het parametrische punt, dat het gelegen moet zijn op een *meetkundige plaats van $\omega - k$ afmetingen*, die we door $G^{(\omega-k)}$ aanduiden. Hierbij onderstellen we steeds, dat de voorwaarde is wat CAYLEY (**4** art. 4) *regelmatig* („regular") noemt, d. w. z. niet samengesteld uit voorwaarden van verschil-

---

[1]) In **3** verwijst CAYLEY bij zijn literatuuropgave omtrent de voorstelling van voorwaarden door meetkundige plaatsen in een ruimte van meer afmetingen naar SALMON (**1** en **2** *Quart. Journ. of Math. Vol.* 7 *a.* 8). Een meer algemeene bespreking van deze quasi-geometrische voorstelling van voorwaarden (zonder uitsluitend aan krommen opgelegde voorwaarden op het oog te hebben) geeft CAYLEY in **4** *Phil. Trans. Vol.* 160, *Coll. Pap. Vol.* 6.

lende dimensie [1]). Moeten de parameters aan k van elkaar onafhankelijke enkelvoudige betrekkingen voldoen, dan is dit een k-voudige voorwaarde, zonder dat echter omgekeerd een k-voudige voorwaarde steeds expliciet door k vergelijkingen tusschen de parameters kan worden voorgesteld. Toch zeggen we, dat steeds een k-voudige voorwaarde k *gegevens* vertegenwoordigt, ook al zijn die gegevens niet alle van elkaar te scheiden.

Aan een voorwaarde kan dikwijls op verschillende manieren worden voldaan. Een dier manieren is dan als de *eigenlijke* te beschouwen, terwijl bij de andere *oneigenlijk* aan de voorwaarde wordt voldaan. Die oneigenlijke oplossingen kunnen echter op hun beurt weer in verschillende soorten vervallen. De meetkundige plaats der parametrische punten, die oneigenlijke oplossingen vertegenwoordigen, noemt CAYLEY de *speciaal-plaats* („special locus") van het parametrische punt. Deze speciaal-plaats (waarvan er ook meerdere kunnen zijn, overeenkomend met de verschillende soorten van oneigenlijke oplossingen) kan evenveel dimensies hebben als de *totaal-plaats* (d. i. de volledige meetkundige plaats $G^{(\omega-k)}$), in welk geval zij van de totaal-plaats kan worden afgezonderd. Men heeft dan op die speciaal-plaats verder niet te letten en alleen de overblijvende G als de bij de voorwaarde behoorende meetkundige plaats te beschouwen.

Het kan echter even goed gebeuren, dat de speciaal-plaats minder dan $\omega-k$ dimensies telt en dus (daar we de voorwaarde ondersteld hebben regelmatig te zijn) een meetkundige plaats op de totaal-plaats vormt. In dat geval kan de speciaal-plaats niet worden afgescheiden. Ligt dan het parametrische punt P op $G^{(\omega-k)}$, dan heeft men met een eigenlijke oplossing te doen, behalve als P op een op de $G^{(\omega-k)}$ gelegen $G^{(<\omega-k)}$ wordt aange-

---

[1]) CAYLEY noemt een voorwaarde uit eenige andere *samengesteld* („composed"), als ze vervuld is zoodra aan een der samenstellende voorwaarden voldaan is (4 art. 14).

nomen [1]). Verder is het nog mogelijk, dat op die speciaal-plaats een nog specialere meetkundige plaats gelegen is met nog minder dimensies, enz.

Is aan de kromme tegelijkertijd een k- en een l-voudige voorwaarde opgelegd, dan moet het parametrische punt gelegen zijn op de doorsnede van de bijbehoorende $G^{(\omega-k)}$ en $G^{(\omega-l)}$. Deze doorsnede heeft in het algemeen $\omega-k-l$ dimensies. Het geheel der beide voorwaarden is dan als één enkele $k+l$-voudige voorwaarde te beschouwen.

Het kan echter ook zijn, dat de doorsnede van $G^{(\omega-k)}$ en $G^{(\omega-l)}$ meer dan $\omega-k-l$ dimensies heeft. Die doorsnede zal dan behalve uit die $G^{(>\omega-k-l)}$ nog uit een $G^{(\omega-k-l)}$ kunnen bestaan. Deze $G^{(\omega-k-l)}$ noemen we het *doorsnijdingsresidu* („residual locus"). Als voorbeeld hiervan diene het geval van twee oppervlakken in een $R^{(4)}$, die een kromme gemeen hebben en bovendien een stelsel van punten; dit puntenstelsel is dan het doorsnijdingsresidu.

Legt men een kromme tegelijkertijd een k- en een l-voudige voorwaarde op (deze worden steeds van elkaar onafhankelijk ondersteld, d.w.z. niet uit elkaar af te leiden), dan is de bedoeling de kromme daarmede een $k+l$-voudige voorwaarde op te leggen. Hebben echter $G^{(\omega-k)}$ en $G^{(\omega-l)}$ een $G^{(>\omega-k-l)}$ gemeen, dan is het voor P een minder dan $k+l$-voudige voorwaarde op deze $G^{(>\omega-k-l)}$ te liggen, echter een $k+l$-voudige voorwaarde op het doorsnijdingsresidu gelegen te zijn.

Hieruit blijkt, dat de eigenlijke manier om aan beide voorwaarden te voldoen die is, waarbij P op het doorsnijdingsresidu ligt. De oplossingen, waarbij P op de $G^{(>\omega-k-l)}$ ligt, moeten als oneigenlijk worden verworpen. Zoo opgevat geven dus een k- en een l-voudige voorwaarde, die tegelijk vervuld moeten zijn, steeds een $k+l$-voudige voorwaarde.

---

[1]) Met $G^{(<\omega-k)}$ is bedoeld een meetkundige plaats van minder dan $\omega-k$ dimensies.

Doet de boven besproken bijzonderheid zich niet voor, m. a. w. is het doorsnijdingsresidu de volledige doorsnede van $G^{(\omega-k)}$ en $G^{(\omega-l)}$, dan noemt CAYLEY de beide voorwaarden *totaal onafhankelijk* („completely independent") van elkaar.

Dergelijke beschouwingen kan men houden voor meer dan twee voorwaarden. Zijn deze niet totaal onafhankelijk, dan kan er toch steeds een voorwaarde uit worden afgeleid, waarvan de dimensie gelijk is aan de som der dimensies der afzonderlijke voorwaarden. Bij de doorsnijding der meetkundige plaatsen worden dan steeds de doorsneden met een te groot dimensiegetal weggelaten. Het kan dan echter ook gebeuren, dat er als doorsnijdingsresidu niets overblijft. In dat geval kan aan die voorwaarden op eigenlijke wijze *niet* tegelijkertijd worden voldaan.

Is de gezamenlijke dimensie der voorwaarden gelijk aan ω, dan heeft het doorsnijdingsresidu *nul* dimensies en is dus een *puntenstelsel.* Het aantal dier punten, waarvan mogelijk sommige meermalen geteld moeten worden, heet de *graad* van het puntenstelsel [1]).

Dit is tevens het aantal krommen, die aan de ω-voudige voorwaarde voldoen, als met iedere ligging van het parametrische punt slechts één kromme overeenkomt en omgekeerd, hetgeen het geval is als de parameters *lineair* in de vergelijking der kromme voorkomen, b.v. de coëfficienten-verhoudingen zijn van de algemeene vergelijking van den m^{den} graad.

Is aan de kromme een k-voudige voorwaarde opgelegd, en voegt men daaraan nog de conditie toe, dat ze door $\omega-k$ willekeurig gelegen punten gaan moet, dan is daardoor de kromme bepaald. Het aantal krommen, die dan aan de vraag voldoen, wordt den *graad* van de k-voudige voorwaarde genoemd. Daar de voorwaarde door een gegeven punt te moeten gaan tot een lineaire betrekking

---

[1]) Hierbij wordt, evenals in al het volgende, steeds ondersteld, dat de voorwaarden tot *algebraïsche* betrekkingen tusschen de parameters aanleiding geven.

tusschen de parameters aanleiding geeft [1]), is de $G^{(k)}$ behoorend bij de voorwaarde, dat de kromme door $\omega - k$ gegeven punten gaat, een lineaire ruimte, die we door $R^{(k)}$ voorstellen. Het aantal snijpunten van $G^{(\omega - k)}$ en $R^{(k)}$ is gelijk aan den graad van $G^{(\omega - k)}$, zoodat de graad eener voorwaarde dezelfde is als die der bijbehoorende meetkundige plaats.

Zijn aan de kromme eenige totaal van elkaar onafhankelijke voorwaarden opgelegd met een gezamenlijke dimensie ω, dan hebben de bijbehoorende meetkundige plaatsen niets anders gemeenschappelijk dan een puntenstelsel, waarvan het aantal (mits samenvallende punten meermalen geteld worden) gelijk is aan het product der graden der afzonderlijke voorwaarden. Hierbij onderstellen we, dat de speciaal-plaatsen met een gelijk aantal dimensies als de meetkundige plaatsen, waarbij ze behooren, zijn weggelaten. Maar ook dan nog is het mogelijk, dat sommige punten van het puntenstelsel op een speciaal-plaats liggen, en dus bij een oneigenlijke oplossing behooren. Immers vervangt men een der meetkundige plaatsen door een er op gelegen speciaal-plaats van lagere dimensie, en dus de bijbehoorende voorwaarde door een speciale manier om aan die voorwaarde te voldoen, dan is het niet gezegd, dat die speciale voorwaarde van de overige totaal onafhankelijk is, zoodat die speciaal-plaats met de overige meetkundige plaatsen een puntenstelsel gemeen kan hebben. De graad van dat puntenstelsel moet dan van dien van het oorspronkelijke puntenstelsel worden afgetrokken om het aantal eigenlijke oplossingen te verkrijgen.

Zijn aan de kromme eenige niet totaal van elkaar onafhankelijke voorwaarden opgelegd met een gezamenlijke dimensie ω, dan hebben de meetkundige plaatsen behalve een puntenstelsel $G^{(0)}$ nog een of meer doorsneden $G^{(<0)}$ van meer dan nul

---

[1]) Altijd als de parameters lineair in de vergelijking der kromme voorkomen.

dimensies, die bij oneigenlijke oplossingen behooren en dus worden weggelaten. Daardoor reduceert zich de graad van het puntenstelsel, die nu dus kleiner uitvalt dan het product der graden der verschillende voorwaarden. Deze reductie hangt van den aard der doorsneden van meer dan nul dimensies af en is meestal moeilijk te bepalen. Ook nu kan zich weer het geval voordoen, dat onder de punten van het puntenstelsel er sommige op een speciaal-plaats gelegen zijn, en dat zich dus het aantal eigenlijke oplossingen nog verder reduceert.

---

§ 2. *„Quasi-geometrische" voorstelling van aanrakingsvoorwaarden.*

Zij aan de kromme de enkelvoudige voorwaarde opgelegd aan een gegeven kromme te moeten raken, d.w.z. er twee samenvallende punten mede gemeen te hebben, dan kan aan die voorwaarde behalve op de eigenlijke wijze op twee verschillende manieren oneigenlijk worden voldaan: 1ste doordat de gevraagde kromme door een dubbelpunt (of keerpunt) der gegeven kromme gaat, 2de doordat de gevraagde kromme een dubbelpunt vertoont, dat op de gegeven kromme ligt, of nog meer bijzonder twee samenvallende krommen bevat of daar geheel uit bestaat.

Bij deze conditie van aanraking behoort een meetkundige plaats $G^{(\omega-1)}$. Ieder dubbelpunt (of keerpunt) der gegeven kromme geeft aanleiding tot een lineaire speciaal-plaats met hetzelfde dimensiegetal $\omega-1$, zoodat zulk een speciaal-plaats van de meetkundige plaats kan worden afgezonderd. Ieder dier speciaal-plaatsen behoort echter meermalen tot de meetkundige plaats. Hetgeen overblijft na afscheiding dier speciaal-plaatsen met evenveel dimensies wordt door CAYLEY de *contact-plaats* („contact-locus") genoemd. Deze is van den graad $k+2(m-1)n$. Hierin is n de graad, k de klasse der gegeven kromme en m de graad der gevraagde kromme. De

parameters worden ondersteld de $\omega = \frac{1}{2} m (m+3)$ verhoudingen tusschen de coëfficienten van een C_m te zijn.

De andere manier om oneigenlijk aan de vraag te voldoen (n.l. doordat een dubbelpunt van C_m op C_n ligt) geeft een speciaal-plaats van minder dimensies, die gelegen is op de contact-plaats. Immers daarvoor is in de eerste plaats noodig, dat de discriminant van C_m nul is, dus dat het parametrische punt ligt op een $G^{(\omega-1)}$, die door CAYLEY de *discriminant-plaats* („discriminant-locus") genoemd wordt. Deze is van den graad $3(m-1)^2$. De discriminant-plaats snijdt de contact-plaats volgens een $G^{(\omega-2)}$ van den graad $3(m-1)^2 \{k+2(m-1)n\}$. Niet alle punten van deze doorsnede geven echter oneigenlijke oplossingen. Een op die doorsnede gelegen parametrisch punt geeft n.l. òf een kromme C_m met een dubbelpunt, die C_n buiten dat dubbelpunt gewoon aanraakt (eigenlijke oplossing), òf een C_m met een op C_n gelegen dubbelpunt (oneigenlijke oplossing). De doorsnede van discriminant- en contactplaats valt dus in twee gedeelten met $\omega-2$ dimensies uiteen, waarvan er slechts één een speciaal-plaats is. Deze speciaal-plaats noemen we de *dubbelpuntscontact-plaats*. Zij is van den graad $3(m-1)n$. Immers haar vergelijkingen worden gevonden door eliminatie der homogene coördinaten x, y, λ uit

$$C_n = 0 \ , \ \frac{dC_m}{dx} = 0 \ , \ \frac{dC_m}{dy} = 0 \ \text{en} \ \frac{dC_m}{d\lambda} = 0 \ , \ . \ . \ . \ (a)$$

waarin $C_n = 0$ en $C_m = 0$ de vergelijkingen der krommen C_n en C_m voorstellen. De voorwaarde, dat deze vergelijkingen een stel wortels gemeen hebben, is met twee betrekkingen tusschen de coëfficienten aequivalent. Ze is echter niet voor te stellen door twee vergelijkingen tusschen de coëfficienten (b. v. de twee vergelijkingen, die men krijgt door x, y en λ uit twee drietallen der vier vergelijkingen (a) te elimineeren). De voorwaarde van oneigenlijke aanraking in een dubbelpunt van C_m wordt dus voorgesteld door een *beperkt systeem* van vier vergelijkingen (de vier verge-

lijkingen, die men krijgt door x, y en λ telkens uit drie der vier vergelijkingen (a) te elimineeren), dat met twee vergelijkingen aequivalent is. [1])

De graad der voorwaarde voor de coëxistentie van $k+p$ niethomogene vergelijkingen met p veranderlijken is door ROBERTS bepaald voor het meest algemeene geval, dat n.l. de coëfficienten der $k+p$ vergelijkingen van verschillenden graad worden beschouwd. [2]) De uitkomst van ROBERTS ondergaat echter een aanzienlijke vereenvoudiging als de coëfficienten van eenzelfde vergelijking alle van denzelfden graad zijn. Zijn de vergelijkingen in de veranderlijken van den graad a, b, c, ..., en zijn de graden harer coëfficienten resp. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, dan is de graad der coëxistentievoorwaarde $P_k\, a\, b\, c \ldots$ Hierin stelt P_k de som der producten k aan k der grootheden

$$\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}, \ldots .$$

voor.

---

[1]) SALMON—FIEDLER. *Algebra der lin. Transformationen.* TEUBNER Leipzig 1877, art. 266. Heeft een systeem van vergelijkingen ∞^{α} gemeenschappelijke wortels, waarvan een eveneens α-voudig oneindig deel aan een nieuw toegevoegde vergelijking voldoet, maar een ander deel niet, dan blijft bij toevoeging dezer vergelijking het systeem met een gelijk aantal vergelijkingen aequivalent, maar toch ondergaan de gemeenschappelijke wortels een beperking. Het zoo ontstane systeem wordt een *beperkt systeem* („beschränktes System") genoemd. Voor de bepaling van zulk een systeem zijn dus meer vergelijkingen noodig dan het aantal, waarmede het systeem aequivalent is.

[2]) SALMON—FIEDLER. *Lin. Transformationen*, art. 293. S. ROBERTS. On a simplified method of obtaining the order of algebraical conditions, *Proc. of the London Math. Soc. Vol.* 6 (1874—'75), p. 101—113; Sur l'ordre des conditions de la coexistence des équations algébriques à plusieurs variables, *Crelle's Journal Bd.* 67 (1867), p. 266—278.

Passen we dit toe op het bepalen van den graad in de coëfficienten van C_m der coëxistentievoorwaarde van

$$C_n = 0, \frac{dC_m}{dx} = 0, \frac{dC_m}{dy} = 0 \text{ en } \frac{dC_m}{d\lambda} = 0.$$

Dan is $k = 2$ en

$$a = n\,,\ b = c = d = m-1,$$
$$\alpha = 0\,,\ \beta = \gamma = \delta = 1\quad,$$

dus

$$P_2 = \frac{3}{(m-1)^2},$$

en bijgevolg de graad der coëxistentievoorwaarde en dus ook der dubbelpuntscontact-plaats:

$$P_2\, n\,(m-1)^2 = 3n\,(m-1).$$

Het aantal dimensies der dubbelpuntscontact-plaats bedraagt $\frac{1}{2}\,m\,(m+3) - 2 = \frac{1}{2}\,(m-1)\,(m+4)$. Hieruit leidt men af:

Het aantal krommen van den m^{den} graad door $\frac{1}{2}\,(m-1)\,(m+4)$ gegeven punten, die een dubbelpunt hebben, dat op een gegeven kromme van den graad n en de klasse k ligt, bedraagt $3n\,(m-1)$.

Ik heb er mij van overtuigd, dat de dubbelpuntscontact-plaats *tweemaal* voorkomt onder de doorsnede van discrimant-plaats en contact-plaats. De $G^{(\omega-2)}$, die van deze doorsnede overblijft na afzondering der dubbelpuntscontact-plaats, is derhalve van den graad

$$3(m-1)^2\{k + 2(m-1)n\} - 6n\,(m-1) = 3(m-1)\{k\,(m-1) + 2nm\,(m-2)\}.$$

Parametrische punten hierop gelegen behooren bij krommen met een dubbelpunt, die buiten het dubbelpunt een gewone aanraking aan C_n vertoonen. We vinden dus:

Het aantal krommen van den m^{den} graad door $\frac{1}{2}\,(m-1)\,(m+4)$ gegeven punten, die een dubbelpunt hebben en elders een gegeven kromme van den graad n en de klasse k aanraken, bedraagt $3\,(m-1)\{k\,(m-1) + 2nm\,(m-2)\}$.

Behalve de dubbelpuntscontact-plaats liggen er op de contact-plaats nog meerdere specaal-plaatsen. De voorwaarde van aanraking is n.l. ook vervuld als de C_m de C_n in twee verschillende punten aanraakt. In het bijbehoorende parametrische punt doorsnijdt de contact-plaats zich zelf. De contact-plaats heeft dus een dubbel-$G^{(\omega-2)}$, die de speciaal-plaats is behoorende bij tweemalige aanraking. We noemen deze de *dubbelcontact-plaats.* Deze speciaal-plaats wordt door de contact-plaats nog eens gesneden volgens een $G^{(\omega-3)}$. Door de punten van deze $G^{(\omega-3)}$ gaan drie bladen der contact-plaats, zoodat ze behoort bij krommen C_m, die de C_n in drie verschillende punten aanraken. Deze speciaal-plaats noemen we de *triplecontact-plaats*, enz.

Verder is de aanrakingsvoorwaarde ook voldaan bij een 3-puntige aanraking (doorsnijding in drie samenvallende punten). Dit geeft aanleiding tot een speciaal-plaats $G^{(\omega-2)}$, die we de *driepunts-contact-plaats* noemen. Deze is van de contact-plaats een *keer-*$G^{(\omega-2)}$, d. w. z. de doorsnede van de contact-plaats met een willekeurig plat vlak vertoont een keerpunt in een snijpunt van dat vlak met de driepuntscontact-plaats. De graad der driepuntscontact-plaats is $3k + 3n(m-2) + \varkappa$, waarin $\varkappa$ het aantal keerpunten der gegeven C_n voorstelt. Op deze driepuntscontact-plaats ligt weer een *vierpuntscontact-plaats* [1]), die een keer-$G^{(\omega-3)}$ van de keer-$G^{(\omega-2)}$ der contact-plaats is, enz.

Het bestudeeren van de verschillende voorwaarden van aanraking met een gegeven C_n komt dus neer op het onderzoek der verschillende speciaal-plaatsen en speciaal-plaatsen van speciaal-plaatsen enz., die op de contact-plaats gelegen zijn.

Zijn aan de kromme C_m voorwaarden van aanraking met verschillende gegeven krommen opgelegd, dan moet het parametrische punt op de gemeenschappelijke doorsnede der bijbehoorende contact-plaatsen gelegen zijn. De studie dier voorwaarden komt

---

[1]) Deze ligt natuurlijk ook geheel op de dubbelcontact-plaats.

dus neer op een bestudeering der doorsneden der verschillende op de contact-plaatsen gelegen speciaal-plaatsen, of (wat op hetzelfde neerkomt) der speciaal-plaatsen, die op de gemeenschappelijke doorsnede der verschillende contact-plaatsen gelegen zijn.

---

§ 3. *Toepassing op die gevallen, waarbij de gevraagde kromme een rechte of een kegelsnede is.*

In het geciteerde opstel (3) bespreekt CAYLEY nog in het bijzonder de gevallen $m = 1$ (art. 15) en $m = 2$ (art. 16—22).

Is $m = 1$ en dus de gevraagde kromme een rechte, dan is het aantal parameters $\omega = 2$. De parametrische punten liggen dan in een plat vlak. De contact-plaats behoorend bij een gegeven C_n is nu niets anders dan de *reciproke kromme* [1]) van C_n. De dubbelcontact-plaats bestaat uit de dubbelpunten, de driepuntscontact-plaats uit de keerpunten der contact-plaats, die we nu *contact-kromme* kunnen noemen. De bestudeering dier aanrakingsvoorwaarden komt dus geheel neer op de studie der reciproke kromme.

Is $m = 2$ en dus de gevraagde kromme een kegelsnede, dan is $\omega = 5$. De verschillende kegelsneden worden dus voorgesteld door punten in een 5-dimensionale ruimte $R^{(5)}$. De discriminant-plaats is nu een $G_3^{(4)}$ (d.w.z. een $G^{(4)}$ van den derden graad). Punten daarop gelegen representeeren geen eigenlijke kegelsneden maar *lijnenparen*. Op deze discriminant-plaats ligt als speciaal-plaats met twee dimensies minder een $G_4^{(2)}$, wier punten kegelsneden voorstellen, die in twee samenvallende rechten gedegenereerd zijn. Deze speciaal-plaats is een oppervlak van den 4den graad, het *puntenpaar-oppervlak* („bipoint-locus"). [2])

---

[1]) Getransformeerde kromme met pool en poollijn.

[2]) CAYLEY kiest dezen naam omdat een in twee samenvallende rechten gedegenereerde kegelsnede als klasse-kromme te beschouwen is als twee

Is aan de kegelsnede de voorwaarde opgelegd een gegeven C_n aan te raken, dan moet het parametrische punt op de bijbehoorende contact-plaats liggen. Deze is een $G^{(4)}$ van den graad $k+2n$. Voor iedere C_n gaat de contact-plaats door het puntenpaar-oppervlak, daar een in twee samenvallende rechten gedegenereerde kegelsnede iedere kromme oneigenlijk aanraakt, en wel n maal. Hieruit ziet men, dat het puntenpaar-oppervlak een n-voudig oppervlak van iedere contact-plaats is.

Op de contact-plaats ligt als speciaal-plaats de driepuntscontact-plaats van den graad $3k+\varkappa$, die een keer-$G^{(3)}$ der contact-plaats is. Deze keer-$G^{(3)}$ snijdt het puntenpaar-oppervlak volgens een kromme $G^{(1)}$. Die kromme ligt geheel op het keeroppervlak (het vierpuntscontact-oppervlak van den graad $6k-4n+3\varkappa$) der keer-$G^{(3)}$, daar als een samenvallend lijnenpaar een 3-puntige aanraking uitvoert dit vanzelf een 4-puntige aanraking wordt.

Het keeroppervlak heeft verder een keerkromme van den graad $10(k-n)+6\varkappa$, en deze keerkromme weer $15k-18n+10\varkappa$ keerpunten. Daarvan zijn er $12k-15n+9\varkappa$ niet op het puntenpaar-oppervlak gelegen en vertegenwoordigen dus niet-gedegenereerde zes-puntig aanrakende kegelsneden (sextactische punten), terwijl de overige $3(k-n)+\varkappa$ keerpunten wel op dit oppervlak liggen en behooren bij de dubbeltellende buigraaklijnen van C_n.

Verder heeft de contact-plaats een dubbel-$G^{(3)}$ van den graad $\frac{1}{2}\{(k+2n)^2-10k-4n-3\varkappa\}$ gaande door het puntenpaar-oppervlak. Behalve dit puntenpaar-oppervlak ligt op deze dubbel-$G^{(3)}$ nog het *triplecontact-oppervlak*, welks punten kegelsneden vertegenwoordigen, die de C_n driemaal eigenlijk aanraken. Op dit triplecontact-oppervlak, dat een drie-voudig oppervlak der contact-

---

punten. Ze ontstaat b.v. door de kleine as van een ellips tot nul te laten naderen. De kegelsnede wordt dan een dubbeltellend begrensd deel van een rechte (de groote as), waarvan de eindpunten de twee bovengenoemde punten zijn.

plaats is, ligt een vier-voudige kromme der contact-plaats en daar weer op vijf-voudige punten der contact-plaats. Deze kromme en die punten hebben resp. op de 4 en 5 maal aanrakende kegelsneden betrekking.

Is aan de kegelsnede de voorwaarde opgelegd twee krommen C_{n_1} en C_{n_2} (met klassen k_1 en k_2) aan te raken, dan moet het parametrische punt liggen op de doorsnede $G^{(3)}$ der bijbehoorende contact-plaatsen. Deze doorsnede is van den graad $(k_1 + 2n_1)$ $(k_2 + 2n_2)$. Men vindt zoo de bekende eigenschap:

Het aantal kegelsneden door drie gegeven punten, die twee krommen van den graad n_1, n_2 en de klasse k_1, k_2 aanraken, bedraagt $(k_1 + 2n_1)$ $(k_2 + 2n_2)$.

Moet de kegelsnede drie krommen C_{n_1}, C_{n_2} en C_{n_3} aanraken, dan moet het parametrische punt op de doorsnede $G^{(2)}$ der drie contact-plaatsen gelegen zijn. De volledige doorsnede is van den graad $(k_1 + 2\,n_1)\,(k_2 + 2\,n_2)\,(k_3 + 2\,n_3)$. Van die contact-plaatsen is echter het puntenpaar-oppervlak (eveneens een $G^{(2)}$) een resp. n_1-, n_2- en n_3-voudig oppervlak, zoodat dit $n_1\,n_2\,n_3$ maal tot de volledige doorsnede behoort. Daar de graad van het puntenpaar-oppervlak 4 bedraagt, wordt de graad der restdoorsnede met $4\,n_1\,n_2\,n_3$ verminderd, dus gelijk aan:

$$(k_1 + 2\,n_1)\,(k_2 + 2\,n_2)\,(k_3 + 2\,n_3) - 4\,n_1\,n_2\,n_3.$$

De punten dezer restdoorsnede vertegenwoordigen kegelsneden, die de drie krommen eigenlijk aanraken. We vinden dus de eveneens bekende eigenschap:

Het aantal kegelsneden door twee gegeven punten, die drie krommen van den graad n_1, n_2, n_3 en de klasse k_1, k_2, k_3 eigenlijk aanraken, bedraagt $(k_1 + 2\,n_1)\,(k_2 + 2\,n_2)\,(k_3 + 2\,n_3) - 4\,n_1\,n_2\,n_3$.

Moeilijker wordt echter de zaak als aan de kegelsnede wordt voorgeschreven 4 of 5 gegeven krommen aan te raken. De 4 of 5 contact-plaatsen hebben ook dan het puntenpaar-oppervlak gemeenschappelijk en bovendien een kromme resp. een puntensysteem.

De eigenlijke oplossingen behooren dan bij die kromme of dat puntensysteem, dat dan het doorsnijdingsresidu vormt. De graad van dit doorsnijdingsresidu wordt door het gemeenschappelijke oppervlak gereduceerd.

Reeds hieruit blijkt, dat bij ingewikkelde vraagstukken de toepassing der quasi-geometrische methode groote moeilijkheden medebrengt.

---

§ 4. *Voorbeelden van toepassing der „quasi-geometrische" methode.*

In een aan de geciteerde verhandeling (3) toegevoegd aanhangsel (Annex N⁰. 2, 3, 4, 5) werkt CAYLEY aan eenige eenvoudige voorbeelden zijn methode nader uit. Bij een dier voorbeelden (Annex N⁰. 3) zullen we de door CAYLEY verkregen uitkomsten kortelijk vermelden.

Dit voorbeeld handelt:

Over de kegelsneden door twee gegeven punten rakend aan een gegeven kegelsnede.

Gebruikt men de gegeven punten om het aantal parameters voorkomend in de vergelijking der kegelsnede te verminderen, dan wordt dit aantal $\omega = 3$, zoodat de parametrische punten in een gewone 3-dimensionale ruimte liggen. De contact-plaats is nu een *rationaal oppervlak van den zesden graad.* Dit oppervlak heeft een *keerkromme van den zesden graad,* de *driepuntscontactkromme,* en verder een *uit twee kegelsneden bestaande dubbelkromme,* de *dubbelcontact-kromme.* Ieder dier dubbel-kegelsneden snijdt de keerkromme in *twee* punten. Deze *vier* punten representeeren kegelsneden, die de gegeven kegelsnede vier-puntig aanraken, daar bij twee kegelsneden een twee- en een drie-puntige aanraking in verschillende punten (te zamen 5 snijpunten vertegenwoordigend) niet mogelijk is.

Uit deze eigenschappen van het contact-oppervlak volgt:

Er gaan zes kegelsneden door vier gegeven punten, die een gegeven kegelsnede aanraken.

Er gaan zes kegelsneden door drie gegeven punten, die een gegeven kegelsnede drie-puntig aanraken.

Er gaan vier kegelsneden door drie gegeven punten, die een gegeven kegelsnede tweemaal aanraken.

Er gaan vier kegelsneden door twee gegeven punten, die een gegeven kegelsnede vier-puntig aanraken.

Als laatste toepassing zullen we nog het volgende niet bij CAYLEY voorkomende voorbeeld bespreken, dat handelt:

Over de cirkels, die een gegeven kromme C_n aanraken.

De algemeene vergelijking van een cirkel bevat 3 parameters, zoodat de parametrische punten in een 3-dimensionale ruimte liggen. Als rechthoekige coördinaten van het parametrische punt kiezen we de rechthoekige coördinaten van het middelpunt van den cirkel en zijn straal. We nemen dus in het vlak van den cirkel twee rechthoekige assen aan, die we nu tevens als parametrische assen bezigen, waarlangs we de coördinaten van het middelpunt uitzetten. Hieruit blijkt, dat het parametrische punt van een cirkel gevonden wordt door in zijn middelpunt een loodlijn op zijn vlak op te richten en daarop naar den eenen zoowel als naar den anderen kant van af het middelpunt een stuk gelijk aan den straal van den cirkel uit te zetten. Deze parameters komen nu wel *rationaal*, maar niet *lineair* in de vergelijking van den cirkel voor. Er komt dan ook wel met ieder beeldpunt *één* cirkel overeen, maar daarentegen heeft iedere cirkel *twee* beeldpunten, die symmetrisch liggen ten opzichte van het vlak B van den cirkel.

Brengt men nu door ieder punt S eener kromme C_n de beide rechten aan, die de kromme loodrecht snijden en hoeken van 45° met het vlak B dier kromme maken, dan vormen al die

rechten te zamen een oppervlak, waarvan ieder punt het parametrische punt is van een cirkel, die C_n aanraakt, en wel in het bijbehoorende punt S. Dit oppervlak is dus het *contact-oppervlak.*

Nauwkeurig is dit oppervlak onderzocht door H. DE VRIES (5 *Verh. der Kon. Akad. van Wetensch. Deel* 8), die er den naam van *cyclographisch oppervlak* aan geeft, zoodat we hetgeen verder volgt daaraan kunnen ontleenen.

DE VRIES onderstelt hierbij, dat de kromme C_n (van de klasse k) geen hoogere bijzonderheden vertoont dan dat ze δ dubbelpunten en $\varkappa$ keerpunten bezit; verder dat ze ε maal door ieder der beide cirkelpunten gaat en σ maal de lijn in het oneindige aanraakt, terwijl hij aanneemt, dat de vergelijking der kromme bestaanbaar is en deze zich dus in de beide cirkelpunten op dezelfde wijze gedraagt.

Het contact-oppervlak is een *symmetrisch ontwikkelbaar oppervlak* van den graad $r = 2(k + n) - 4\varepsilon - 2\sigma$ [1]) en de klasse $2k$. De keerkromme van dit oppervlak heeft de ontwondene van C_n tot projectie op B. De keerkromme wordt uit die ontwondene afgeleid door in ieder punt der ontwondene naar weerskanten een loodlijn op het vlak B op te richten gelijk aan den bijbehoorenden kromtestraal van C_n. Deze keerkromme is de *driepuntscontactkromme*; we zouden ze ook de *kromtecirkel-lijn* kunnen noemen, daar ieder punt er van een kromtecirkel van C_n vertegenwoordigt. De keerkromme is van den graad $n' = 2(3k + \varkappa - 6\varepsilon - 3\sigma)$, van de klasse $2k$ (de klasse van het contact-oppervlak) en van den rang $r = 2(k + n - 2\varepsilon - \sigma)$ (den graad van het contact-oppervlak). Daar met ieder punt der ontwondene twee symmetrisch gelegen punten der keerkromme overeenkomen, zoo volgt daaruit, *dat de ontwondene van den graad* $\frac{1}{2}n'$ *en de klasse* $\frac{1}{2}r$ *is* (l. c. p. 18).

---

[1]) Dit zoowel als de andere aantallen heb ik aan DE VRIES ontleend, na de notaties eenigszins gewijzigd en uit al zijn resultaten de i (aantal buigpunten van C_n) verdreven te hebben.

De keerkromme vertoont $2(7k - 3n + 3\varkappa - 12\varepsilon - 6\sigma)$ keerpunten, waarvan er $2(k - 2\varepsilon - \sigma)$ de *isotrope punten* [1]) der kromme C_n zijn en $2(n - 2\varepsilon - 2\sigma)$ afkomstig zijn van de enkelvoudige snijpunten van C_n met de lijn in het oneindige. De $2(k - 2\varepsilon - \sigma)$ keerpunten gaan bij het projecteeren op B verloren en geven dus geen keerpunten der ontwondene. De $2(n - 2\varepsilon - 2\sigma)$ keerpunten geven $n - 2\varepsilon - 2\sigma$ in het oneindige gelegen keerpunten der ontwondene, die dus niet met toppen der oorspronkelijke kromme overeenkomen. De overblijvende $2(6k - 4n + 3\varkappa - 8\varepsilon - 3\sigma)$ keerpunten behooren bij $6k - 4n + 3\varkappa - 8\varepsilon - 3\sigma$ in het eindige gelegen keerpunten der ontwondene en dus bij even zoovele *toppen* der oorspronkelijke kromme. Deze $2(6k - 4n + 3\varkappa - 8\varepsilon - 3\sigma)$ keerpunten vertegenwoordigen dus de 4-puntig aanrakende cirkels en zijn dus de *vierpuntscontact-punten* (l. c. p. 19).

Het contact-oppervlak heeft de oorspronkelijke kromme als dubbelkromme en de kegelsnede K_∞ als $(k - \sigma)$-voudige kromme, waarin K_∞ de doorsnede van het vlak in het oneindige is met een omwentelingskegel, wiens as loodrecht op het vlak B van C_n staat. Bovendien heeft het oppervlak nog een „*restdubbelkromme*" van den graad

$$2x' = 2(k + n - 2\varepsilon - \sigma)^2 - k^2 - 10k - 2n + 2k\sigma - 3\varkappa + 20\varepsilon - \sigma^2 + 9\sigma.$$

De punten van deze kromme vertegenwoordigen cirkels, die C_n tweemaal aanraken. De restdubbelkromme is dus de *dubbelcontact-kromme*. Deze projecteert zich op het vlak B volgens de meetkundige plaats der middelpunten van de dubbelrakende cirkels. Deze meetkundige plaats is dus wegens de symmetrie van den graad x' (l. c. p. 23).

De dubbelcontact-kromme bezit een aantal punten, waarin ze door een niet door die kromme gaand blad van het contact-oppervlak gesneden wordt. In die punten heeft zoowel het contact-

[1]) Onder een *isotroop punt* eener kromme verstaan we een punt, waar de raaklijn isotroop is, d. w. z. door een der cirkelpunten gaat.

oppervlak als de dubbelcontact-kromme een 3-voudig punt. Deze punten vertegenwoordigen cirkels, die C_n driemaal aanraken, en zijn dus de *triplecontact-punten.* Voor hun aantal $2t'$ vindt DE VRIES een zeer gecompliceerde uitdrukking (l. c. p. 36). Het aantal cirkels, die C_n driemaal aanraken, bedraagt dan t'.

De restdubbelkromme heeft met de keerkromme een zeker aantal punten gemeen. Behalve eenige in het oneindige (op K_∞) gelegen punten en de keerpunten der oorspronkelijke kromme (waar de keerkromme dubbelpunten en de restdubbelkromme keerpunten heeft) zijn deze snijpunten in de eerste plaats de vierpuntscontact-punten. Immers een vier-puntig rakende cirkel is als een dubbelrakenden cirkel met samenvallende raakpunten te beschouwen. In deze vierpuntscontact-punten, waar de keerkromme keerpunten en de restdubbelkromme gewone punten heeft, raken beide krommen elkaar aan. Bovendien hebben de keerkromme en de restdubbelkromme nog

$$2\gamma' = 2(k + 2n - 4\varepsilon - \sigma)(3k + \varkappa - 6\varepsilon - 3\sigma - 12) + 2\sigma(k - \sigma - 1)$$
$$- 2(18k - 36n + 14\varkappa - 9\sigma)$$

snijpunten. Dit zijn de punten, waar de keerkromme door een enkelvoudig blad van het contact-oppervlak gesneden wordt. Deze punten, waar de keerkromme gewone punten en de restdubbelkromme keerpunten heeft (zonder dat beide krommen elkaar daar raken), vertegenwoordigen cirkels, die de kromme C_n drie-puntig en in een ander punt twee-puntig aanraken. Hieruit volgt:

Het aantal kromtecirkels, die de gegeven kromme elders nog eens aanraken, bedraagt γ' (l. c. p. 22 en 30).

De voorwaarde, dat een cirkel door een gegeven punt P gaat, luidt geometrisch, dat het parametrische punt op een gelijkzijdigen omwentelingskegel ligt met P als top en met een as, die loodrecht op het vlak B der kromme staat. De beeldpunten der door P gaande cirkels, die C_n aanraken, liggen dus op de doorsnede van dezen kegel met het contact-oppervlak. Deze doorsnede bestaat

uit de $(k-\sigma)$-maal tellende kegelsnede K_∞ (waar de genoemde kegel éénmaal en het contact-oppervlak $(k-\sigma)$-maal doorheen gaat) en een restdoorsnede van den graad

$$2r - 2(k-\sigma) = 2(k + 2n - 4\varepsilon - \sigma).$$

De projectie daarvan op het vlak B is de meetkundige plaats van de middelpunten der door P gaande cirkels, die C_n aanraken. Uit de symmetrie der restdoorsnede volgt, dat deze meetkundige plaats van den graad $k+2n-4\varepsilon-\sigma$ is (l. c. p. 38).

De kegel snijdt de driepuntscontact-kromme in $2n'$ punten, waarvan er $n'+2\sigma = 2(3k+\varkappa-6\varepsilon-2\sigma)$ in het eindige liggen. Deze in het eindige gelegen snijpunten zijn keerpunten der restdoorsnede en vertegenwoordigen kromtecirkels, die door het punt P gaan. Men heeft dus:

Er gaan $3k+\varkappa-6\varepsilon-2\sigma$ *kromtecirkels van* C_n *door een willekeurig punt* P (l. c. p. 40).

De kegel snijdt de dubbelcontact-kromme in eenige punten, waarvan het aantal na aftrek der in het oneindige gelegen snijpunten

$$(k + 2n - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 10k - 4n - 3\varkappa + 24\varepsilon + 7\sigma$$

bedraagt. Deze snijpunten zijn dubbelpunten der restdoorsnede en vertegenwoordigen dubbelrakende cirkels door P. Men vindt dus:

Door een willekeurig punt gaan

$$\tfrac{1}{2}\{(k + 2n - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 10k - 4n - 3\varkappa + 24\varepsilon + 7\sigma\}$$

cirkels, die C_n *tweemaal aanraken* (l. c. p. 40).

Moet de cirkel door twee punten P en Q gaan, dan moet het parametrische punt gelegen zijn op de doorsnede der bijbehoorende kegels met P en Q als top. Deze doorsnede is een gelijkzijdige hyperbool, die symmetrisch is ten opzichte van B. Deze hyperbool snijdt het contact-oppervlak in $2r$ punten, waarvan er $2r-2(k-\sigma) = (k+2n-4\varepsilon-\sigma)$ in het eindige liggen. Hieruit volgt:

Door twee willekeurige punten gaan $k+2n-4\varepsilon-\sigma$ *cirkels, die* C_n *aanraken* (l. c. p. 42).

Is aan den cirkel de voorwaarde opgelegd twee krommen C_{n_1} en C_{n_2} (waarvan we alle bijbehoorende grootheden door de indices 1 en 2 van elkaar onderscheiden) aan te raken, dan moet het parametrische punt op de doorsnede der bijbehoorende contact-oppervlakken liggen. Daar het eene contact-oppervlak $(k_1 - \sigma_1)$-maal, het andere $(k_2 - \sigma_2)$-maal door K_∞ gaat, reduceert zich de graad der restdoorsnede tot:

$$4(k_1 + n_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1)(k_2 + n_2 - 2\varepsilon_2 - \sigma_2) - 2(k_1 - \sigma_1)(k_2 - \sigma_2).$$

Hieruit volgt:

De meetkundige plaats der middelpunten van cirkels, die C_{n_1} en C_{n_2} aanraken, is een kromme van den graad

$$2(k_1 + n_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1)(k_2 + n_2 - 2\varepsilon_2 - \sigma_2) - (k_1 - \sigma_1)(k_2 - \sigma_2)$$

(l. c. p. 48).

De restdoorsnede der beide contact-oppervlakken heeft

$$2\{(3k_1 + \varkappa_1 - 6\varepsilon_1 - 3\sigma_1)(k_2 + 2n_2 - 4\varepsilon_2 - \sigma_2) + \sigma_1(k_2 - \sigma_2)\}$$

in het eindige gelegen keerpunten (snijpunten der driepuntscontact-kromme van C_{n_1} met het contact-oppervlak van C_{n_2}), die kromtecirkels van C_{n_1} vertegenwoordigen, die C_{n_2} aanraken, en

$$2\{(3k_2 + \varkappa_2 - 6\varepsilon_2 - 3\sigma_2)(k_1 + 2n_1 - 4\varepsilon_1 - \sigma_1) + \sigma_2(k_1 - \sigma_1)\}$$

keerpunten, die kromtecirkels van C_{n_2} vertegenwoordigen, die C_{n_1} aanraken. De aantallen dier kromtecirkels leidt men hier door deeling door 2 uit af (l. c. p. 51).

Bovendien heeft de restdoorsnede twee soorten van in het eindige gelegen dubbelpunten, n.l. de snijpunten van de dubbelcontact-kromme van C_{n_1} met het contact-oppervlak van C_{n_2}, die cirkels vertegenwoordigen, die C_{n_1} tweemaal en C_{n_2} éénmaal aanraken, en de snijpunten van de dubbelcontact-kromme van C_{n_2} met het contact-oppervlak van C_{n_1} met een analoge beteekenis. De aantallen dier punten (of, na deeling door 2, dier cirkels) zijn eveneens door DE VRIES bepaald (l. c. p. 52 en 53).

Is ten slotte aan den cirkel de voorwaarde opgelegd drie gegeven krommen C_{n_1}, C_{n_2} en C_{n_3} aan te raken, dan moet het parametrische punt een der in het eindige gelegen snijpunten der drie contact-oppervlakken zijn. Het aantal dier snijpunten wordt gevonden door van het totale aantal dat der in het oneindige gelegen snijpunten af te trekken. Na deeling door 2 vindt men dan het aantal cirkels, die de drie krommen aanraken. Het resultaat is:

Er zijn

$$(k_1+2n_1-4\varepsilon_1-\sigma_1)(k_2+2n_2-4\varepsilon_2-\sigma_2)(k_3+2n_3-4\varepsilon_3-\sigma_3)$$
$$-4(n_1-2\varepsilon_1)(n_2-2\varepsilon_2)(n_3-2\varepsilon_3)$$

cirkels, die drie gegeven krommen C_{n_1}, C_{n_2} en C_{n_3} aanraken (l. c. p. 56).

Tevens is hiermede de vraag opgelost naar het aantal cirkels door een gegeven punt, die twee gegeven krommen C_{n_1} en C_{n_2} aanraken. De derde kromme C_{n_3} is dan n.l. een punt, waarvoor $n_3=\varepsilon_3=c_3=0$ en $k_3=1$ is. Men vindt dus:

Door een gegeven punt gaan er $(k_1+2n_1-4\varepsilon_1-\sigma_1)(k_2+2n_2-4\varepsilon_2-\sigma_2)$ *cirkels, die twee gegeven krommen C_{n_1} en C_{n_2} aanraken.*

Hiervan is weer het reeds besproken geval van twee gegeven punten en één gegeven kromme een bijzonder geval.

We hebben dit voorbeeld wat uitvoeriger besproken om de bruikbaarheid der geometrische methode in sommige gevallen in het licht te stellen. Het slagen dezer methode bij het besproken voorbeeld ligt, behalve aan het geringe aantal (drie) parameters, m. i. hoofdzakelijk aan het *ontwikkelbaar* zijn van het contact-oppervlak, waardoor b.v. de driepuntscontact-kromme (keerkromme) zich reeds van zelf aanbiedt. Bij ingewikkelder vraagstukken, b.v. dat, hetwelk door DE JONQUIÈRES (161) behandeld is (zie het vierde hoofdstuk), twijfel ik echter aan de bruikbaarheid dezer methode.

TWEEDE HOOFDSTUK.

KARAKTERISTIEKENTHEORIE.

---

§ 5. *Stelling van* CHASLES.

Heeft men een systeem van ∞^1 kegelsneden of een *kegelsnedensysteem van de eerste orde,* waarvan er μ door een gegeven punt gaan en ν een gegeven rechte aanraken, dan noemt CHASLES (**15** *Comptes Rendus t.* 58, p. 298) de getallen μ en ν de *karakteristieken* van het systeem. Het kegelsnedensysteem wordt dan een systeem (μ, ν) genoemd.

Empirisch is CHASLES er toe gekomen de volgende stelling uit te spreken (**17** *Compt. Rend. t.* 59, p. 215):

Het aantal kegelsneden van een systeem (μ, ν), *die aan een enkelvoudige voorwaarde voldoen, wordt steeds voorgesteld door*

$$\alpha\mu + \beta\nu,$$

waarin α *en* β *slechts van den aard der enkelvoudige voorwaarde, maar niet van het kegelsnedensysteem afhangen.*

De getallen α en β worden de *karakteristieken* der voorwaarde genoemd. CAYLEY (**3** art. 26) noemt ze de *representatieven* („representatives").

Den eenvoudigsten vorm geeft men aan het karakteristiekenbegrip en de stelling van CHASLES door gebruik te maken van de door HALPHEN (**28** *Comptes Rendus t.* 76, **29** *Bull. de Soc. Math. t.* 1) ingevoerde en door SCHUBERT (**65** *Math. Ann. Bd.* 10) tot een

volledig systeem uitgewerkte symbolische rekenwijze en terminologie, zooals die voorkomt in SCHUBERT's werk *Kalkül der abzählenden Geometrie* (67). SCHUBERT stelt een voorwaarde, die aan een figuur is opgelegd, door een letter voor, b.v. a. Is die voorwaarde voldoende om de figuur te bepalen, dan stelt a tevens het *aantal* figuren voor, die aan de voorwaarde voldoen. De voorwaarde, die uitdrukt dat twee voorwaarden a en b tegelijkertijd vervuld zijn, wordt als een symbolische vermenigvuldiging geschreven en dus de voorwaarde ab genoemd. Daarentegen stelt $a+b$ de voorwaarde voor, dat aan een der beide voorwaarden a en b voldaan is. Zegt men dat tusschen eenige voorwaarden een betrekking bestaat, b.v. $a+b=c$ (waarin a, b en c worden ondersteld voorwaarden van dezelfde dimensie te zijn), dan beteekent dit dat men steeds een juiste betrekking tusschen aantallen verkrijgt na symbolische vermenigvuldiging met een willekeurige voorwaarde x van voldoende dimensie om de figuur te bepalen, dus dat de vergelijking $ax+bx=cx$ juist is voor iedere voorwaarde x van de vereischte dimensie.

In de schrijfwijze van SCHUBERT kan nu de stelling van CHASLES aldus geschreven worden:

$$z = \alpha\mu + \beta\nu \, , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin μ en ν tevens de *voorwaarden* voorstellen, dat een kegelsnede van het systeem door een gegeven punt gaat resp. een gegeven rechte aanraakt, terwijl z een *willekeurige* enkelvoudige voorwaarde beteekent en α en β van die voorwaarde afhankelijke getallen zijn. Daar deze betrekking bestaat voor *ieder* kegelsnedensysteem van de eerste orde, kan men ook zeggen, *dat ze bestaat voor een kegelsnede*. Immers een kegelsnedensysteem van de eerste orde wordt gevormd door alle kegelsneden, die aan een 4-voudige voorwaarde b.v. x voldoen. Zegt men nu, dat de vergelijking (1) voor een kegelsnede bestaat, dan wil dit niets anders zeggen dan dat men een juiste vergelijking tusschen aantallen verkrijgt na vermenigvuldiging met een willekeurige 4-voudige voorwaarde x.

Men kan de stelling van CHASLES dus ook als volgt uitspreken:

Bij een kegelsnede is iedere enkelvoudige voorwaarde een homogene lineaire functie der voorwaarden μ en ν.

Een onmiddellijk gevolg hiervan is, dat iedere enkelvoudige voorwaarde een homogene lineaire functie is van ieder ander tweetal enkelvoudige voorwaarden. SCHUBERT merkt dan ook op (**67** p. 276), dat het geen zin heeft te beweren, dat juist de voorwaarden μ en ν voor het systeem karakteristiek zijn. Men kan daarvoor met evenveel recht ieder ander tweetal gebruiken. Het eenige waar het op aan komt is, dat het *karakteristiekengetal*, d. i. het *aantal* karakteristieken, *twee* bedraagt.

In plaats dus van de voorwaarden μ en ν, die CHASLES *elementairvoorwaarden* noemt, als karakteristieken te bezigen kan men daarvoor ook de *degeneratievoorwaarden* δ en η kiezen. Hierin stelt δ de voorwaarde voor, dat de kegelsnede als graad-kromme in twee rechten degenereert en als klasse-kromme in twee samenvallende stralenbundels, waarvan de drager het snijpunt der bovengenoemde rechten is; deze degeneratie heet een *lijnenpaar*. Daarentegen is η de voorwaarde, dat de kegelsnede als graad-kromme in twee samenvallende rechten degenereert en als klasse-kromme in twee stralenbundels, wier dragers op die rechte liggen; deze degeneratie heet een *puntenpaar*. De voorwaarden δ en η zijn evenals de voorwaarden μ en ν onderling reciprook.

Om het verband te vinden, dat er tusschen de voorwaarden δ en η eenerzijds en μ en ν anderzijds bestaat, hebben we eerst de karakteristieken μ en ν der *elementairsystemen* (daaronder verstaat CHASLES systemen gevormd door kegelsneden, die door een uit factoren μ en ν bestaande 4-voudige voorwaarde gedefinieerd zijn) te kennen, of, wat op hetzelfde neerkomt, de *elementairgetallen* $\mu^5, \mu^4\nu, \ldots, \nu^5$.

Deze zijn:

$$\begin{aligned} \mu^5 &= \nu^5 &&= 1, \\ \mu^4\nu &= \mu\nu^4 &&= 2, \\ \mu^3\nu^2 &= \mu^2\nu^3 &&= 4. \end{aligned}$$

Volgens de stelling van CHASLES is nu:

$$\delta = \alpha\,\mu + \beta\,\nu,$$

waaruit door symbolische vermenigvuldiging volgt:

$$\mu^4\delta = \alpha\,\mu^5 + \beta\,\mu^4\nu = \alpha + 2\,\beta,$$
$$\nu^4\delta = \alpha\,\mu\nu^4 + \beta\,\nu^5 = 2\,\alpha + \beta.$$

Daar er *drie* lijnenparen zijn, die door 4 gegeven punten gaan, echter *geen* lijnenpaar, dat aan 4 willekeurig gegeven rechten raakt, zoo is $\mu^4\delta = 3$ en $\nu^4\delta = 0$. Hieruit leidt men af:

$$\alpha = -1\ ,\ \beta = 2\ ,$$

dus:

$$\delta = 2\,\nu - \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Reciprook hiermede is:

$$\eta = 2\,\mu - \nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De beide laatste vergelijkingen op een kegelsnedensysteem van de eerste orde toepassend krijgt men de volgende door CHASLES gevonden eigenschap:

In een kegelsnedensysteem (μ, ν) *komen* $2\,\nu - \mu$ *lijnenparen en* $2\,\mu - \nu$ *puntenparen voor* [1]).

---

[1]) Deze eigenschap kan ook zonder de empirische stelling van CHASLES op een groot aantal manieren bewezen worden, die hierop neerkomen, dat men eenzelfde stelling eerst zoo bewijst, dat de gedegenereerde kegelsneden geen rol spelen, en daarna zoo, dat die wel optreden, waaruit dan omgekeerd het aantal dier degeneraties kan gevonden worden. Een dergelijk bewijs geeft CHASLES (**134** p. 1173—1174) ze en is ook te vinden in SALMON-FIEDLER (**32** *Höh. Kurven*, art. 394) en CLEBSCH-LINDEMANN (**31** Bd. 1, p. 392).

§ 6. *Degeneratiebeschouwingen van* ZEUTHEN.

Door vergelijking (2) met $\mu^3\nu$ te vermenigvuldigen vindt men:

$$\delta\mu^3\nu = 2\mu^2\nu^2 - \mu^4\nu = 6.$$

Op overeenkomstige wijze vindt men alle aantallen kegelsneden, die aan een degeneratievoorwaarde en een 4-voudige elementairvoorwaarde voldoen. Het resultaat is:

$$\left.\begin{array}{l} \delta\mu^4 \;\; = \eta\nu^4 \;\; = 3\,, \\ \delta\mu^3\nu \;\; = \eta\nu^3\mu \;\; = 6\,, \\ \delta\mu^2\nu^2 = \eta\nu^2\mu^2 = 4\,, \\ \delta\mu\;\nu^3 = \eta\nu\;\mu^3 = 0\,, \\ \delta\;\;\nu^4 = \eta\;\;\mu^4 = 0\,, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

waarvan de eerste en de twee laatste vergelijkingen van zelf sprekend zijn. De kegelsneden, die aan de voorwaarde $\delta\mu^3\nu$ voldoen, zijn de lijnenparen door drie gegeven punten F_1, F_2, F_3, die een gegeven rechte l (oneigenlijk) aanraken, d. w. z. hun dubbelpunt op l hebben. Het aantal dier lijnenparen is klaarblijkelijk *drie*, die echter, daar $\delta\mu^3\nu = 6$ is, alle *dubbel* geteld moeten worden. Aan de voorwaarde $\delta\mu^2\nu^2$ voldoet slechts het lijnenpaar, dat men krijgt door het snijpunt der gegeven lijnen met de beide gegeven punten te verbinden, en wel (blijkens $\delta\mu^2\nu^2 = 4$) *viermaal.*

Door de gegeven rechten door krommen te vervangen, hetgeen geen invloed hebben kan op het aantal malen dat zulk een gedegenereerde kegelsnede geteld moet worden, vindt ZEUTHEN (23 *Nouvelles Annales* (2) *t.* 5, p. 247) de volgende regels:

Is aan een kegelsnede de voorwaarde δ opgelegd en een 4-voudige voorwaarde, die o. a. vordert een gegeven kromme aan te raken, dan moet een kegelsnede, die haar dubbelpunt op die kromme heeft (en dus aan de aanrakingsvoorwaarde oneigenlijk voldoet) en aan de overige voorwaarden op eigenlijke wijze voldoet, t w e e m a a l geteld worden.

Is aan een kegelsnede de voorwaarde δ opgelegd en een 4-voudige voorwaarde, die o. a. vordert twee gegeven krommen aan te raken, dan moet een kegelsnede, die haar dubbelpunt in een snijpunt der gegeven krommen heeft en aan de overige voorwaarden eigenlijk voldoet, v i e r m a a l geteld worden.

De hiermede reciproke regels voor de voorwaarde η zijn hier gemakkelijk uit af te leiden.

De tweede der genoemde regels is een gevolg van den eersten. Om dit in te zien, heeft men te bedenken, dat een kegelsnede, die haar dubbelpunt in een snijpunt der gegeven krommen heeft, beide krommen oneigenlijk aanraakt en dus om twee redenen dubbel geteld, dus in het geheel viermaal geteld moet worden.

Wil men nu een enkelvoudige voorwaarde z in μ en ν uitdrukken, dan moeten de getallen α en β, die in vergelijking (1) voorkomen, bepaald worden. Daartoe vermenigvuldigt men (1) met $\delta\mu\nu^2$. Men vindt dan:

$$z\delta\mu\nu^2 = \alpha\,\delta\mu^2\nu^2 + \beta\,\delta\mu\nu^3 = 4\alpha,$$

en evenzoo:

$$z\eta\mu^2\nu = 4\beta.$$

De kegelsneden, die aan de voorwaarde $z\delta\mu\nu^2$ voldoen, zijn lijnenparen, wier dubbelpunt in het snijpunt der beide bij de voorwaarde ν^2 behoorende rechten ligt en waarvan de eene door het bij de voorwaarde μ behoorende punt gaat, de andere aan de voorwaarde z voldoet. Het aantal dier kegelsneden is dus gelijk aan het aantal rechten door een willekeurig punt, die te zamen met een willekeurige rechte aan de voorwaarde z voldoen. Volgens den regel van ZEUTHEN moet echter ieder dier kegelsneden *viermaal* geteld worden, waaruit een eenvoudige beteekenis voor α en de reciproke beteekenis voor β voortvloeit. Men vindt dus:

Een enkelvoudige voorwaarde z kan worden voorgesteld door $\alpha\mu + \beta\nu$, waarin α het aantal rechten door een willekeurig punt aangeeft, die met een willekeurige rechte gecombineerd kegelsneden

opleveren, die aan de voorwaarde z voldoen, en waarin β de hiermede reciproke beteekenis heeft.

Is z b.v. de voorwaarde een kromme van den graad n en de klasse k aan te raken, dan volgt hieruit onmiddelijk, dat $\alpha = k$ en $\beta = n$ is.

Om nu verder van een kegelsnedensysteem de beide karakteristieken μ en ν te bepalen, heeft men slechts te bepalen hoeveel kegelsneden aan de degeneratievoorwaarden δ en η voldoen, waarna men dan μ en ν uit de vergelijkingen (2) en (3) kan oplossen. Nu vindt men gemakkelijk welke lijnenparen en puntenparen in het systeem voorkomen; de eigenlijke moeilijkheid hierbij is echter te bepalen hoeveel maal ieder dier gedegenereerde kegelsneden geteld moet worden. Om dit te vinden voert ZEUTHEN (**23**) de verschillende soorten van lijnenparen of puntenparen met nog te bepalen getallenfactoren vermenigvuldigd in. Past men nu de formules, waarin deze onbepaalde coëfficienten voorkomen, toe op eenvoudige gevallen, hierbij lettend op het beginsel der dualiteit, dan is het mogelijk betrekkingen tusschen die coëfficienten af te leiden, waaruit ze kunnen worden opgelost. Hiermede zijn dan δ en η en dus ook μ en ν gevonden.

Op deze wijze heeft ZEUTHEN de karakteristieken van alle kegelsnedensystemen van de eerde orde bepaald, die door een viervoudige aanrakingsvoorwaarde met één of meer gegeven krommen gedefinieerd zijn. Deze systemen zijn volgens de schrijfwijze van CAYLEY (**3** art. 39):

(1) (1) (1) (1) ,	(1 , 1) (1) (1) ,	(1 , 1) (1 , 1) ,	(1 , 1 , 1) (1) ,	(1 , 1 , 1 , 1),
(2) (1) (1) ,	(2) (1 , 1) ,	(2 , 1) (1) ,	(2 , 1 , 1) ,	
(2) (2) ,	(2 , 2) ,			
(3) (1) ,	(3 , 1) ,			
(4) .				

Hierin wordt b.v. met het systeem (2 , 1) (1) bedoeld het systeem der kegelsneden, die een gegeven kromme in verschillende punten

één- en twee-voudig en een andere gegeven kromme enkelvoudig aanraken, met (2, 2) het systeem der kegelsneden, die een gegeven kromme tweemaal twee-voudig aanraken, enz.

---

§ 7. HALPHEN's *wijziging van de stelling van* CHASLES.

De door CHASLES uitgesproken stelling is door hem empirisch gevonden, d. w. z. bij alle kegelsnedensystemen en voorwaarden, die hij onderzocht, vond hij zijn stelling bevestigd. Zij is ongeveer gelijktijdig (1873) bewezen door CLEBSCH (**27** *Math. Annalen Bd.* 6) langs algebraïschen weg en door HALPHEN (**29** *Bull. de la Soc. Math. t.* 1) met behulp van het CHASLES'sche correspondentiebeginsel. Later is nog door LINDEMANN (**31** CLEBSCH's *Vorl. über Geom. Bd.* 1, p. 398—400) een algebraïsch en door SCHUBERT en HURWITZ (**30** *Gött. Nachr.* 1876; ook opgenomen in SCHUBERT's *Abz. Geom.* § 38) een op de symbolische rekenwijze gegrond bewijs geleverd.

In 1876 sprak echter HALPHEN (**46** *Comptes Rendus t.* 83) zijn twijfel uit omtrent de algemeene geldigheid van de stelling van CHASLES, dien hij later uitvoeriger begrondde (**48** en **49** *Proc. of the Lond. Math. Soc. Vol.* 9 *a* 10, *Math. Annalen Bd.* 15; **47** *Journ. de l'Éc. Polyt.* 45e *cah.*). Bij de vroeger gegeven bewijzen, die alle op de beschouwing der in het systeem voorkomende lijnenparen en puntenparen berustten, was steeds een vier parameters bevattende degeneratievorm der kegelsneden over het hoofd gezien. Behalve het lijnenpaar en het puntenpaar heeft men namelijk nog een het eerst door ZEUTHEN beschouwde degeneratie, die CAYLEY (**3** art. 32) een *lijn-paar-punt* („line-pair-point") noemt. Deze is als een vereeniging van beide degeneratievormen te beschouwen, zoodat hierbij de kegelsnede als graad-kromme in twee samenvallende rechten degenereert en als klasse-kromme in

twee samenvallende stralenbundels, wier dragers in een punt dezer rechte samenvallen. Deze degeneratie heeft zooals zij door hen werd opgevat niet zooals de beide andere *vier* maar *drie* parameters, zoodat bij een kegelsnedensysteem van de eerste orde in het algemeen zulke lijn-paar-punten niet voorkomen. Komen deze in bijzondere gevallen wel in het systeem voor, dan moeten ze zoowel onder de δ lijnenparen als onder de η puntenparen worden medegeteld.

HALPHEN heeft echter aangetoond, dat ook in deze ZEUTHEN'sche degeneratie in zeker opzicht wel degelijk vier parameters kunnen voorkomen. Men kan een lijn-paar-punt n.l. beschouwen als de limiet van een ellips, waarvan beide assen a en b tot nul naderen, en wel zoo dat, terwijl a een oneindig kleine van de eerste orde is, b van de orde $1 + {}^1/_h$ is. De lijn van het lijn-paar-punt valt dan langs de groote as der ellips. Punt en lijn zijn bepaald door drie parameters, terwijl h de vierde parameter is. Dezen degeneratievorm noemen we een HALPHEN'*sche degeneratie.*

Een dergelijke gedegenereerde kegelsnede wordt door een willekeurige rechte in twee punten gesneden, wier afstand d oneindig klein is, terwijl de raaklijnen uit een willekeurig punt een oneindig kleinen hoek e insluiten. Hierbij heeft nu $\frac{d^h}{e}$ een eindige limiet. Is het stelsel algebraïsch dan heeft h steeds een rationale waarde $\frac{p}{q}$. HALPHEN noemt q de *orde*, p de *klasse der gedegenereerde kegelsnede.* Deze HALPHEN'sche degeneratie is met zich zelf reciprook, met dien verstande echter, dat bij reciproke transformatie de getallen p en q verwisselen, zooals uit het eindig zijn van *lim.* $\frac{d^p}{e^q}$ volgt.

Van dezen degeneratievorm zijn de beide andere bijzondere gevallen. Voor een lijnenpaar is n.l. $q = 0$ en voor een puntenpaar $p = 0$. Ook hieruit ziet men, dat deze bij reciproke transformatie (verwisseling van p en q) in elkaar overgaan.

Ter toelichting van de beschouwingen van HALPHEN kiezen we het voorbeeld, dat ook door HALPHEN gebruikt is, waarbij n.l. de kegelsneden van het stelsel geconjugeerd zijn ten opzichte van een vasten driehoek $A_1 A_2 A_3$, die we als coördinatendriehoek kiezen. In homogene coördinaten wordt dan de vergelijking van het stelsel:

$$g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_3^2 = 0,$$

waarbij tusschen g_1, g_2 en g_3 nog een betrekking bestaat. Deze betrekking denken we van dien aard, dat het mogelijk is g_1, g_2 en g_3 als rationale geheele functies (alle van denzelfden graad a) van een parameter ω voor te stellen. In dat geval wordt het stelsel *rationaal* genoemd. We beschouwen dus een *rationaal stelsel van geconjugeerde kegelsneden.*

Is een der g's b.v. g_1 gelijk *nul*, dan degenereert de kegelsnede en wel in een lijnenpaar met A_1 als dubbelpunt. Is echter $g_1 = g_2 = 0$, dan degenereert de kegelsnede in een op $A_1 A_2$ gelegen puntenpaar (oneindig afgeplatte kegelsnede), als *lim.* $\frac{g_1}{g_2}$ eindig is; in alle andere gevallen krijgt men een HALPHEN'sche degeneratie. Is *lim.* $\frac{g_1^q}{g_2^{p+q}}$ eindig, dan is die degeneratie van de orde q en de klasse p; hierbij is A_1 het punt, $A_1 A_2$ de rechte der degeneratie.

Zij nu $\Phi = 0$ de voorwaarde, die aan de kegelsnede van het systeem wordt opgelegd, dan is (daar we die voorwaarde algebraïsch onderstellen) Φ een geheel homogeen polynomium in g_1, g_2 en g_3. Is c de graad van Φ in de g's, dan is de graad van Φ in ω gelijk aan ac, zoodat ook het aantal kegelsneden van het systeem, die aan de voorwaarde voldoen, ac bedraagt.

Onder dit aantal zijn echter gedegenereerde kegelsneden medegerekend, die oneigenlijk aan de voorwaarde voldoen en die we dus niet mede willen tellen. Hierdoor ondergaat het gevonden aantal een reductie, die nog bepaald moet worden.

HALPHEN onderstelt, dat de voorwaarde $\Phi = 0$ *projectief* is, d.w.z. hare beteekenis blijft behouden bij lineaire transformatie. Nu kan echter Φ geen invariant zijn als we het geval uitsluiten, dat de voorwaarde het degenereeren der kegelsneden behelst, daar toch bij een kwadratischen ternairen vorm de discriminant de eenige invariant is. In alle andere gevallen drukt de voorwaarde $\Phi = 0$ een verband uit tusschen de kegelsnede en een andere figuur, dat door lineaire transformatie niet verandert; m. a. w. $\Phi = 0$ is een betrekking tusschen g_1, g_2, g_3 en de coördinaten van 4 punten t, u, v, w, terwijl Φ een *covariant* van $g_1x_1^2 + g_2x_2^2 + g_3x_3^2$ en de coördinaten dier vier punten is. Men heeft dus;

$$\Phi = \Sigma H g_1^{\pi} g_2^{\chi} g_3^{\sigma} ,$$

waarin de coëfficienten H functies van de coördinaten van t, u, v, w zijn. Verder is

$$\pi + \chi + \sigma = c .$$

De wortels van de vergelijking $\Phi = 0$ geven nu twee soorten van kegelsneden: 1ste kegelsneden, die onafhankelijk van t, u, v en w zijn, 2de kegelsneden, die daar wel van afhangen en dus de *eigenlijke* oplossingen opleveren. HALPHEN bewijst, dat deze laatste wortels bij willekeurige ligging van t, u, v, w *enkelvoudig* zijn en dat dus hun aantal het gevraagde aantal kegelsneden oplevert. Verder zou nog gevraagd kunnen worden na te gaan hoe dit aantal zich wijzigt in de bijzondere gevallen, die zich voordoen als de vier punten bijzondere standen innemen. Dit laatste wordt echter uitgesloten en hiermede heeft HALPHEN nauwkeurig geformuleerd wat men te verstaan heeft onder de *onafhankelijkheid* tusschen het systeem en de voorwaarde, welke onafhankelijkheid voor de toepasbaarheid van de stelling van CHASLES reeds vóór de onderzoekingen van HALPHEN als een eerste vereischte erkend was [1]).

---

[1]) Afhankelijkheid heeft men b.v. ten duidelijkste als men aan de kegel-

HALPHEN bewijst verder, dat de oplossingen van de eerste soort gedegenereerde kegelsneden zijn, waarvoor twee der g's nul zijn, dus puntenparen of HALPHEN'sche degeneraties. Aan de bespreking van het aantal dier degeneraties dienen de volgende beschouwingen vooraf te gaan.

Daar Φ een covariant is, is Φ wat de exponenten aangaat symmetrisch ten opzichte der g's. Hierdoor kunnen de termen van Φ in groepen (π, χ, σ) verdeeld worden zoodanig, dat in de termen van een groep (π, χ, σ) alleen de exponenten π, χ en σ voorkomen, maar op verschlllende wijzen over g_1, g_2 en g_3 verdeeld. We kunnen hierbij steeds

$$\pi \geq \chi \geq \sigma$$

onderstellen. Onder de groepen (π, χ, σ) is er zeker een, waarvoor $\sigma = 0$ is, daar anders Φ door $g_1 g_2 g_3$ (d. i. de discriminant van $g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_3^2$) deelbaar zou zijn.

Zij Φ' de voorwaarde, die reciprook is met Φ. Om Φ' te vinden moet men in $\Phi = 0$ g_1 door $\frac{1}{g_1}$ vervangen, g_2 door $\frac{1}{g_2}$ en g_3 door $\frac{1}{g_3}$ en daarna de noemers verdrijven. Door met $(g_1 g_2 g_3)^{\pi+\chi+\sigma} = (g_1 g_2 g_3)^c$ te vermenigvuldigen (waardoor zeker alle breuken verdreven worden) krijgt men een term:

$$H' g_1^{\chi+\sigma} g_2^{\pi+\sigma} g_3^{\pi+\chi}.$$

Is nu β de kleinste waarde van $\chi + \sigma$, dan wordt de geheele vergelijking door $(g_1 g_2 g_3)^\beta$ deelbaar, waardoor de beschouwde term wordt:

$$H' g_1^{\chi+\sigma-\beta} g_2^{\pi+\sigma-\beta} g_3^{\pi+\chi-\beta}.$$

Hieruit volgt, dat met de groep (π, χ, σ) in de reciproke voorwaarde een groep (π', χ', σ') overeenkomt, waarin

---

sneden van een systeem, die reeds alle een gegeven kromme aanraken, de voorwaarde oplegt deze kromme nog eens aan te raken. Zie CLEBSCH—LINDEMANN, *Vorl. über Geom. Bd.* 1, p. 400.

$$\pi' = \pi + \chi - \beta\,,$$
$$\chi' = \pi + \sigma - \beta\,,$$
$$\sigma' = \chi + \sigma - \beta$$

is. Hierbij is verder:

$$\pi' \geq \chi' \geq \sigma'$$

en:

$$c' = \pi' + \chi' + \sigma' = 2c - 3\beta\,.$$

Reciprook hiermede zijn de betrekkingen:

$$\pi = \pi' + \chi' - \alpha\,,$$
$$\chi = \pi' + \sigma' - \alpha\,,$$
$$\sigma = \chi' + \sigma' - \alpha\,,$$
$$c = 2c' - 3\alpha\,,$$

waarin α de kleinste waarde van $\chi' + \sigma'$ is. Hieruit volgt (door oplossing van c en c'):

$$c = 2\beta + \alpha\,,$$
$$c' = 2\alpha + \beta\,.$$

Hervatten we nu de bespreking van het aantal oneigenlijke oplossingen. Zij Ω een waarde van ω, die g_1 en g_2 beide nul maakt, en wel zoo dat $lim. \frac{g_1{}^q}{g_2{}^{p+q}}$ eindig is, dan bewijst HALPHEN, dat Ω een $\beta q + \gamma$-voudige wortel van $\Phi = 0$ is. Hierin is γ de kleinste waarde, die $\sigma p + \sigma' q$ voor de verschillende groepen van termen van Φ aanneemt.

Beschouwt men nu alle wortels Ω, die twee der g's nul maken, en zij Q de som der bijbehoorende waarden van q, terwijl Γ de som der bijbehoorende waarden van γ is, dan vertegenwoordigen al die wortels Ω in het geheel $\beta Q + \Gamma$ wortels van $\Phi = 0$. Daar $\Phi = 0$ in ω van den graad $ac = a(2\beta + \alpha)$ is, is het aantal N der enkelvoudige wortels, dus het aantal der eigenlijke oplossingen:

$$N = a(2\beta + \alpha) - \beta Q - \Gamma = \alpha a + \beta(2a - Q) - \Gamma.$$

Hierin hebben a en $2a - Q$ een eenvoudige meetkundige beteekenis. Is n.l. $\Phi = 0$ de voorwaarde, dat de kegelsnede door een punt $u(u_1, u_2, u_3)$ gaat, dan is:

$$\Phi = g_1 u_1^2 + g_2 u_2^2 + g_3 u_3^2 .$$

Er is nu slechts één groep van termen, n.l. $(1, 0, 0)$. Hiervoor is $\beta = 0$, zoodat de correspondeerende groep in Φ' is $(1, 1, 0)$, waaruit weer volgt, dat $\alpha = 1$ is. Daar $\sigma = \sigma' = 0$ is, is ook $\gamma = 0$ dus $\Gamma = 0$. Het aantal μ der kegelsneden, die door het punt u gaan, is dus:

$$\mu = a .$$

Zij vervolgens $\Phi = 0$ de reciproke voorwaarde een gegeven rechte aan te raken. Dit geeft een verwisseling van α, β en van σ, σ', zoodat nu $\alpha = 0$, $\beta = 1$ en $\Gamma = 0$ is. Het aantal ν der kegelsneden, die aan een gegeven rechte raken, is dus:

$$\nu = 2a - Q .$$

Met behulp hiervan wordt nu de gevonden uitdrukking voor N:

$$N = \alpha\mu + \beta\nu - \Gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Deze zelfde vergelijking geldt nu niet alleen voor het beschouwde rationale systeem van geconjugeerde kegelsneden, maar ook voor een willekeurig systeem van de eerste orde. Hierin worden α en β op de boven beschreven wijze *alleen* uit de voorwaarde $\Phi = 0$ afgeleid, terwijl μ en ν de CHASLES'sche karakteristieken zijn. Verder is Γ een grootheid, die uit het systeem en de voorwaarde beide gevonden wordt, en gelijk is aan:

$$\Gamma = \Sigma \, min. \, (\sigma p + \sigma' q) .$$

Bevat het kegelsnedensysteem geen andere degeneraties dan lijnenparen en puntenparen, dan is òf $q = 0$ òf $p = 0$. Daar er nu onder de grootheden σ of σ' steeds gevonden worden, die nul zijn, wordt in dat geval $\Gamma = 0$. Hieruit ziet men, *dat het getal* Γ *alleen*

gevormd wordt door HALPHEN'*sche degeneraties.* Men vindt dus:

I. *Bevat een kegelsnedenstelsel* (μ, ν) *geen* HALPHEN'*sche degeneraties, dan is het aantal kegelsneden, die aan een willekeurige voorwaarde voldoen, gelijk aan* $\alpha\mu + \beta\nu$, *waarin* α *en* β *slechts van die voorwaarde afhangen.*

Nog een ander bijzonder geval, waarin de stelling van CHASLES juist is, laat zich uit vergelijking (5) afleiden, en wel door niet aan het kegelsnedenstelsel maar aan de voorwaarde een beperking op te leggen. Is n.l. Φ zoodanig, dat er een groep van termen is, waarvoor $\sigma = \sigma' = 0$ is, dan is eveneens $\Gamma = 0$ en geldt dus $N = \alpha\mu + \beta\nu$ voor *ieder* stelsel ook al bevat het HALPHEN'sche degeneraties.

Voor dit algebraïsche criterium kan een geometrisch in de plaats gesteld worden. Voor een stelsel, dat HALPHEN'sche degeneraties bevat, is n.l. alleen dan $\Gamma = 0$, als er een termengroep is, waarvoor $\sigma = \sigma' = 0$ is. Geldt dus de vergelijking $N = \alpha\mu + \beta\nu$ voor *één* stelsel met HALPHEN'sche degeneraties, dan geldt die vergelijking ook voor *ieder* stelsel. Een voorbeeld van een stelsel met HALPHEN'sche degeneraties levert een bundel kegelsneden, die in een gegeven punt aan een gegeven kromme een aanraking van de derde orde vertoonen. Men vindt dus:

II. *Zij S een bundel kegelsneden, die een gegeven kromme in een gegeven punt drie-voudig aanraken. Indien het aantal kegelsneden van S, die aan een voorwaarde* $\Phi = 0$ *voldoen,* $\alpha + \beta$ *is, dan is het aantal kegelsneden van een willekeurig stelsel* (μ, ν), *die aan diezelfde voorwaarde voldoen, steeds gelijk aan* $\alpha\mu + \beta\nu$.

Wanneer het kegelsnedenstelsel niet aan de restrictie van I voldoet en de voorwaarde niet aan die van II, dan is het aantal gevraagde kegelsneden steeds minder dan $\alpha\mu + \beta\nu$.

Later is door STUDY (55 *Math. Ann. Bd.* 27) aangetoond, dat van uit een bepaald standpunt de stelling van CHASLES als algemeen geldig beschouwd kan worden, hoewel STUDY uitdrukkelijk de juistheid van de ontwikkelingen van HALPHEN heeft toegegeven.

Voor den hierop gevolgden in de *Math. Annalen* gevoerden pennenstrijd tusschen STUDY en ZEUTHEN (**57**, **58**, **59**, **60**, en **61**) verwijs ik naar de in de literatuuropgave genoemde stukken.

---

§ 8. SCHUBERT's *uitbreiding van het karakteristiekenprobleem.*

Zooals reeds in § 5 is opgemerkt kan volgens de terminologie van SCHUBERT de stelling van CHASLES aldus worden uitgesproken:

Bij een kegelsnede kan iedere enkelvoudige voorwaarde als een lineaire homogene functie van twee enkelvoudige voorwaarden worden uitgedrukt.

SCHUBERT (**66** *Gött. Nachr.* 1877, **41** *Math. Ann. Bd.* 10 spec. § 13, **67** *Kalkül. der abz. Geom.* § 37) stelt zich nu de vraag of het mogelijk is deze stelling tot willekeurige figuren en meervoudige voorwaarden uit te breiden. Heeft men een figuur Γ, die van ω parameters afhangt, dan verstaat SCHUBERT onder het *i-voudige karakteristiekenprobleem* dier figuur het volgende:

Is het voor een figuur Γ *mogelijk iedere i-voudige voorwaarde als een homogene lineaire functie van een eindig aantal bepaalde i-voudige voorwaarden uit te drukken?*

Hierbij is natuurlijk de bedoeling, dat de gezochte „*karakteristiekenformule*" voor *ieder* i-voudig systeem der figuren Γ juist is, dus dat de coëfficienten der homogene lineaire functie alleen van de i-voudige voorwaarde, maar niet van het systeem afhangen.

Onderstel, dat het gelukt is een willekeurige i-voudige voorwaarde in m (en niet minder) bepaalde i-voudige voorwaarden uit te drukken, dan noemt SCHUBERT m het *i-voudige karakteristiekengetal* der figuur.

De karakteristiekenformule drukt dan niets anders uit dan dat er tusschen $m+1$ i-voudige voorwaarden, waarvan we er één willekeurig kunnen kiezen, een homogene lineaire vergelijking

bestaat, waaruit weer onmiddellijk volgt, dat zulk een vergelijking tusschen *ieder* $m+1$-tal i-voudige voorwaarden $b, b_1, b_2, \ldots, b_m$ bestaat, zoodat we ook ieder m-tal van elkaar onafhankelijke i-voudige voorwaarden gebruiken kunnen om alle overige in uit te drukken. Zij de vergelijking tusschen $b, b_1, b_2, \ldots, b_m$:

$$\alpha b + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_m b_m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waarin $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ alleen van de voorwaarden maar niet van het systeem afhangende getallencoëfficienten zijn.

Weet men, dat het i-voudige karakteristiekenprobleem oplosbaar is en een karakteristiekengetal m heeft, dan kunnen de coëfficienten der karakteristiekenformule (6) op de volgende wijze bepaald worden. We vermenigvuldigen (6) symbolisch achtereenvolgens met $m+1$ willekeurig gekozen $\omega-i$-voudige voorwaarden $c, c_1, c_2, \ldots, c_m$. Men krijgt dan $m+1$ vergelijkingen, waarin de α's voorkomen vermenigvuldigd met getallencoëfficienten bc, bc_1 enz.; dit zijn n.l. ω-voudige voorwaarden en dus tevens de aantallen der figuren Γ, die aan die voorwaarden voldoen. Na eliminatie van $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vindt men dan:

$$\begin{vmatrix} bc & , b_1c & , b_2c & , \ldots\ldots & , b_mc \\ bc_1 & , b_1c_1 & , b_2c_1 & , \ldots\ldots & , b_mc_1 \\ bc_2 & , b_1c_2 & , b_2c_2 & , \ldots\ldots & , b_mc_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ bc_m & , b_1c_m & , b_2c_m & , \ldots\ldots & , b_mc_m \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad (7)$$

Dit is een gewone (geen symbolische) betrekking tusschen aantallen. Deze vergelijking geldt echter wat de $\omega-i$-voudige voorwaarde c ook zij. Uit (7) kunnen we dus door symbolische deeling [1])

---

[1]) In het algemeen is een symbolische deeling niet geoorloofd (SCHUBERT, *Kalkül der abz. Geom.* § 5), echter wel wanneer zooals hier de factor, waardoor we deelen, geheel willekeurig is.

door c een symbolische vergelijking tusschen de $m+1$ i-voudige voorwaarden b, b_1, $b_2, \ldots, b_m$ afleiden, n.l.:

$$\begin{vmatrix} b & , b_1 & , b_2 & , \ldots\ldots , b_m \\ bc_1 & , b_1c_1 & , b_2c_1 & , \ldots\ldots , b_mc_1 \\ bc_2 & , b_1c_2 & , b_2c_2 & , \ldots\ldots , b_mc_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ bc_m & , b_1c_m & , b_2c_m & , \ldots\ldots , b_mc_m \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad (7)'$$

De elementen van de tweede en volgende rijen zijn dan nog steeds aantallen gebleven. *De zoo verkregen vergelijking* (7)' *is dus de i-voudige karakteristiekenformule.* We vinden dus:

De betrekking tusschen $m+1$ i-voudige voorwaarden is gevonden zoodra men over m zoodanige $\omega-i$-voudige voorwaarden beschikt, dat de $m(m+1)$ aantallen der figuren Γ *bekend zijn, die tegelijkertijd aan een der i-voudige en aan een der $\omega-i$-voudige voorwaarden voldoen.*

Evenzoo geldt de vergelijking (7) wat de i-voudige voorwaarde b ook zij. We kunnen (7) dus ook symbolisch door b deelen, waardoor men een symbolische vergelijking tusschen de $m+1$ $\omega-i$-voudige voorwaarden c, c_1, $c_2, \ldots c_m$ verkrijgt. Tusschen *ieder* $m+1$-tal $\omega-i$-voudige voorwaarden bestaat zulk een betrekking, zoodat we vinden:

1. *Is het i-voudige karakteristiekenprobleem opgelost, dan is dit tevens het geval met het $\omega-i$-voudige.*

2. *De vergelijking* (7) *stelt door c gedeeld de i-voudige en door b gedeeld de $\omega-i$-voudige karakteristiekenformule voor.*

3. *Van een figuur met ω parameters is het i-voudige karakteristiekengetal gelijk aan het $\omega-i$-voudige.*

Deze laatste eigenschap is voor een kegelsnede in een vast vlak uitgesproken door LINDEMANN (31 CLEBSCH's *Vorl. über Geom. Bd.* 1, p. 403). Het hier gegeven bewijs stemt nagenoeg overeen met dat van SCHUBERT (41 *Math. Ann. Bd.* 10, p. 355—357). In het bewijs van SCHUBERT komt echter de symmetrie tusschen en het in één vergelijking opgesloten liggen van de beide karakteris-

tiekenformules niet uit. Het bewijs, dat SCHUBERT in zijn *Kalkül* § 37 geeft, waarbij wel op die symmetrie gelet wordt, is m. i. incorrect [1]).

Men kan echter de vergelijking (7) nog anders interpreteeren en daarmede een nieuwe formuleering van het karakteristiekenprobleem verkrijgen. Deze vergelijking kan n.l. dienen ter bepaling van *bc*, d. i. het aantal figuren Γ, die tegelijkertijd aan een i- en een $\omega-i$-voudige voorwaarde voldoen, of het aantal gemeenschappelijke figuren van een $\omega-i$- en een i-voudig systeem. Daartoe moeten alle overige elementen van den determinant bekend zijn. Men vindt zoo:

Het aantal gemeenschappelijke figuren Γ *(met* ω *parameters) van een i-voudig en een* $\omega-i$*-voudig systeem, beide met een karakteristiekengetal m, is bekend zoodra men over m i-voudige en over m* $\omega-i$*-voudige voorwaarden beschikt zoodanig, dat men weet:* 1ste *hoeveel figuren van het i-voudige systeem aan ieder der m i-voudige voorwaarden voldoen,* 2de *hoeveel figuren van het* $\omega-i$*-voudige systeem aan ieder der m* $\omega-i$*-voudige voorwaarden voldoen,* 3de *hoeveel figuren* Γ *aan een der m i-voudige voorwaarden en tegelijkertijd aan een der m* $\omega-i$*-voudige voorwaarden voldaan.*

Het gezochte aantal is homogeen en lineair zoowel in de aantallen figuren van het i-voudige systeem, die aan de verschillende i-voudige voorwaarden voldoen, als in de aantallen figuren van het $\omega-i$*-voudige systeem, die aan de verschillende* $\omega-i$*-voudige voorwaarden voldoen.*

Men krijgt dus de volgende formuleering van het karakteristiekenprobleem:

Is het mogelijk het aantal gemeenschappelijke figuren van een i-

---

[1]) Daarin wordt toch een homogene lineaire functie van eenige voorwaarden zelf ook een voorwaarde genoemd. Zijn echter b.v. a en b twee voorwaarden, dan kan men moeilijk spreken van een voorwaarde $^1/_3\, a$ of van een voorwaarde $a-b$.

en een $\omega-i$-voudig stelsel voor te stellen door de som van uit twee factoren bestaande termen zoodanig, dat de eerste factoren uitsluitend van het ééne stelsel, de tweede factoren uitsluitend van het andere stelsel afhangen?

---

§ 9. *Voorbeelden van figuren, waarvoor het karakteristiekenprobleem is opgelost.*

Sinds de in § 7 besproken onderzoekingen van HALPHEN weet men, dat streng genomen het karakteristiekenprobleem, enkele zeer eenvoudige figuren uitgezonderd [1]), in ontkennenden zin moet worden beantwoord, waardoor de beschouwingen van SCHUBERT een groot deel van hun waarde verloren hebben. Voor een *punt in een ω-dimensionale ruimte* (en dus ook voor de hiermede reciproke lineaire ruimte $R^{(\omega-1)}$ van $\omega-1$ afmetingen) echter is het karakteristiekenprobleem door de stelling van BÉZOUT opgelost. Stelt p de enkelvoudige voorwaarde voor, dat het punt op een $R^{(\omega-1)}$ ligt, dan drukt de i-voudige voorwaarde p^i uit, dat het punt op de gemeenschappelijke doorsnede van i ruimten $R^{(\omega-1)}$, dus op een $R^{(\omega-i)}$ ligt. Is nu aan het punt een i-voudige voorwaarde b en een $\omega-i$-voudige voorwaarde c opgelegd, dan worden de graden dier voorwaarden (of der gebogen ruimten van $\omega-i$ resp. i afmetingen, waarop de punten liggen, die aan de eene of aan de andere voorwaarde voldoen) voorgesteld door $bp^{\omega-i}$ resp. cp^i. Volgens de stelling van BÉZOUT is nu:

$$bc = (bp^{\omega-i}) \,.\, (cp^i)\,,$$

waarin de stip een gewone vermenigvuldiging beteekent. In den vorm van vergelijking (7) geschreven luidt deze vergelijking:

---

[1]) D.w.z. figuren eenvoudiger dan kegelsneden, zooals punten, lijnen, enz.

$$\begin{vmatrix} bc & p^i c \\ bp^{\omega-i} & p^i p^{\omega-i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & p^i c \\ bp^{\omega-i} & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Men ziet hieruit:

Voor een punt in een meer-dimensionale ruimte is het karakteristiekengetal voor voorwaarden van iedere dimensie gelijk aan é é n.

Als tweede voorbeeld van een figuur, waarvoor het karakteristiekenprobleem volledig is opgelost, noem ik de *rechte lijn in een drie-dimensionale ruimte* ($\omega = 4$). De oplossing wordt n.l. geleverd door de volgende twee stellingen, die voor de lijn-geometrie zijn wat de stelling van Bézout voor de punt-geometrie is:

1. *Een regelvlak van den graad u en een complex van den graad v hebben uv gemeenschappelijke stralen.*

2. *Twee congruenties, wier graden n en n' en wier klassen k en k' zijn, hebben nn' + kk' gemeenschappelijke stralen.*

Onder den *graad* van een congruentie verstaan we het aantal rechten der congruentie, die door een willekeurig punt gaan; onder de *klasse* het aantal rechten, die in een willekeurig plat vlak liggen[1]).

Deze stellingen zijn het eerst gevonden door Halphen (**63** *Comptes Rendus t.* 73, 74); andere bewijzen er voor zijn geleverd door Zeuthen (**64** *Comptes Rendus t.* 78) en Schubert (**65** *Math. Ann. Bd.* 10 *p.* 96—98, **67** *Kalkül p.* 62).

Uit de beide stellingen volgt:

Voor een rechte lijn in een drie-dimensionale ruimte is het één- en het drie-voudige karakteristiekengetal gelijk aan é é n, het twee-voudige karakteristiekengetal gelijk aan t w e e.

Kent men de karakteristiekengetallen, dan zijn met behulp van vergelijking (7) de genoemde stellingen onmiddellijk gevonden. Zij n.l. voor een rechte lijn:

---

[1]) Pascal—Schepp. *Repertorium der höh. Math.* II. Teubner, *Leipzig*, 1902, p. 377. Schubert gebruikt daarvoor in zijn *Kalkül* p. 18 de benamingen *bundelgraad* en *veldgraad.*

b de drie-voudige voorwaarde tot een gegeven regelvlak te behooren,

c de enkelvoudige voorwaarde tot een gegeven complex te behooren,

d de twee-voudige voorwaarde tot een gegeven congruentie te behooren,

g de enkelvoudige voorwaarde een gegeven rechte te snijden,

g_e de twee-voudige voorwaarde in een gegeven plat vlak te liggen,

g_p de twee-voudige voorwaarde door een gegeven punt te gaan,

g_s de drie-voudige voorwaarde tot een gegeven vlakken stralenbundel te behooren.

De graad u van het regelvlak wordt dan door bg voorgesteld, de graad v van het complex door cg_s, de graad n der congruentie door dg_p en haar klasse k door dg_e.

Uit vergelijking (7) volgt dan:

$$\begin{vmatrix} bc & g_s c \\ bg & g_s g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & v \\ u & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ of } bc = uv\,,$$

en

$$\begin{vmatrix} dd' & g_p d' & g_e d' \\ dg_p & g_p^2 & g_e g_p \\ dg_e & g_p g_e & g_e^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dd' & n' & k' \\ n & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ of } dd' = nn' + kk'\,.$$

Verder heeft SCHUBERT (66 *Gött. Nachr.* 1877) het karakteristiekenprobleem in een 3-dimensionale ruimte opgelost voor een straal met een daarop gelegen punt ($\omega = 5$), voor een vlakken stralenbundel ($\omega = 5$) en voor een straal, waarop een punt ligt en waardoor een plat vlak gaat ($\omega = 6$) (*Kalkül* § 39, 40, 41).

Later heeft SCHUBERT (68 *Hamb. Mitt.* 1884, waarop nog een groot aantal voornamelijk in de *Hamb. Mitt.* en *Math. Annalen* verschenen stukken gevolgd zijn) zijne beschouwingen tot meerdimensionale ruimten uitgebreid.

Uit de HALPHEN'sche onderzoekingen schijnt echter te volgen, dat behalve voor de zoogenaamde *hoofdelementen*, punt, lijn, vlak (om ons tot de drie-dimensionale ruimte te beperken), en de paren van hoofdelementen, het alleen dan mogelijk is het aantal gemeenschappelijke figuren van twee systemen als een som van producten voor te stellen, waarvan de eene factor alleen van het eene systeem en de andere factor alleen van het andere systeem afhangt, als in beide systemen of minstens in een van beide bepaalde HALPHEN'sche degeneraties ontbreken. Hierdoor worden er twee onderzoekingsrichtingen in de karakteristiekentheorie mogelijk: 1ste Men beschouwt *alle* systemen en *alle* voorwaarden, maar offert dan ook de analogiën met de stelling van BÉZOUT op. 2de Men offert eenige systemen op, waarvoor de formules niet gelden, en blijft dus de verschillende productenstellingen behouden; men moet dan echter nauwkeurig onderzoeken voor welke systemen de karakteristiekenformules hun geldigheid verliezen [1]).

Met het voorbehoud dus, dat men zeker soort HALPHEN'sche degeneraties uit de systemen uitgesloten denkt, kan het karakteristiekenprobleem nog voor andere figuren worden opgelost. Voor een één- en een vier-voudig kegelsnedensysteem in een plat vlak is dit geschiedt door de stelling van CHASLES (§ 5), voor een twee- en een drie-voudig systeem door CREMONA (20 *Comptes Rendus t.* 59), voor kegelsneden in de ruimte [2]) en kwadratische oppervlakken door HALPHEN (29 *Bull. de la Soc. Math. t.* 2) en later door SCHUBERT (41 *Math. Annalen Bd.* 10). Bij een kegelsnede

---

[1]) Aldus ongeveer SCHUBERT in zijn bespreking der HALPHEN'sche onderzoekingen in *die Fortschritte der Mathematik Bd.* 10 (1878).

[2]) CHASLES (35 *Comptes Rendus t.* 61) vermoedde reeds, dat bij een kegelsnedensysteem in de ruimte iedere enkelvoudige voorwaarde in *drie* enkelvoudige voorwaarden is uit te drukken, b.v. de voorwaarde een gegeven rechte te snijden, de voorwaarde een gegeven plat vlak aan te raken en de voorwaarde haar vlak door een gegeven punt te zenden.

in de ruimte ($\omega = 9$) zijn de enkel- (of acht-) voudige, twee- (of zeven-) voudige, drie- (of zes-) voudige en vier- (of vijf-) voudige karakteristiekengetallen resp. 3, 6, 9 en 10. Bij een kwadratisch oppervlak, waarvoor eveneens $\omega = 9$ is, zijn die getallen in dezelfde volgorde 3, 6, 10 en 13.

Komen echter in de systemen wel HALPHEN'sche degeneraties voor, dan ondergaan de resultaten een wijziging. Door BURALI-FORTI zijn de HALPHEN'sche beschouwingen uitgebreid tot twee- en drie-voudige kegelsnedensystemen en tot kwadratische oppervlakken (**52** en **53** *Battaglini Giorn. t.* 24) en later tot kwadratische variëteiten in een meer-dimensionale ruimte (**54** *Palermo Rend. t.* 4).

In het algemeen kan men zeggen, dat hoe gecompliceerder de figuren worden des te grooter het aantal karakteristieken (zoo die al bestaan) worden zal. Het is hierdoor reeds te begrijpen, dat voor een vlakke kromme van willekeurigen graad het enkel-voudige karakteristiekengetal niet, zooals CHASLES vermoedde, *twee* zijn zal. CHASLES meende n.l. dat zijn voor kegelsneden gevonden stelling $\alpha\mu + \beta\nu$ (§ 5) tot een willekeurig enkelvoudig stelsel van vlakke krommen kon worden uitgebreid en men dus van het stelsel niets anders dan de beide getallen μ (aantal krommen door een gegeven punt) en ν (aantal krommen rakend aan een gegeven rechte) behoefde te kennen.

Uit de onderzoekingen van CLEBSCH en SCHUBERT volgt echter, dat de stelling $\alpha\mu + \beta\nu$ voor krommen van hoogeren dan den tweeden graad niet juist is. Al kan voor die krommen dus niet *iedere* enkelvoudige voorwaarde in μ en ν worden uitgedrukt, toch is er een belangrijke groep van voorwaarden, waarvoor dit wel mogelijk is, n.l. *aanrakingsvoorwaarden met algebraïsche krommen.* Daarvoor geldt de volgende door CHASLES (**15** *Comptes Rendus t.* 58) uitgesproken stelling:

De aanrakingsvoorwaarde met een kromme van den graad n en de klasse k wordt voorgesteld door $k\mu + n\nu$.

Op grond van deze stelling is CHASLES op het onjuiste vermoe-

den gekomen, dat de voorstelling van een enkelvoudige voorwaarde door $\alpha\mu + \beta\nu$ altijd mogelijk zou zijn (voor meerdere bijzonderheden zie § 15).

---

§ 10. *Theorema van* CREMONA. *Moduli der aanrakingsvoorwaarden.*

Sluiten we, hetgeen we in het volgende steeds doen zullen, het optreden van HALPHEN'sche degeneraties uit de beschouwde systemen uit, dan kan bij een kegelsnede in een vast vlak iedere enkelvoudige voorwaarde z in den vorm $\alpha\mu + \beta\nu$ geschreven worden, alwaar μ en ν de bekende in § 5 aangegeven beteekenis hebben. Met CHASLES noemen we $\alpha\mu + \beta\nu$ de modulus dier voorwaarde. Zijn nu aan de kegelsnede twee enkelvoudige voorwaarden

$$z_1 = \alpha_1\mu + \beta_1\nu\,,$$
$$z_2 = \alpha_2\mu + \beta_2\nu$$

opgelegd, dan wordt de modulus der twee-voudige voorwaarde z_1z_2 door symbolische vermenigvuldiging gevonden en is dus:

$$z_1z_2 = \alpha_1\alpha_2\mu^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\,\mu\nu + \beta_1\beta_2\nu^2.$$

Hieruit ziet men, dat een uit twee enkelvoudige voorwaarden samengestelde twee-voudige voorwaarde in de drie zoogenaamde *elementaire voorwaarden* μ^2, $\mu\nu$ en ν^2 kan worden uitgedrukt, die onderling onafhankelijk zijn [1]). Door CREMONA (20) is het eerst aangetoond, dat dit niet alleen voor een samengestelde voor-

---

[1]) Bestond er n.l. een betrekking van den vorm $a\mu^2 + b\mu\nu + c\nu^2 = 0$, dan zou men daaruit door achtereenvolgens symbolisch met μ^3, $\mu^2\nu$, $\mu\nu^2$ en ν^3 te vermenigvuldigen, eenige vergelijkingen tusschen a, b en c kunnen afleiden, die met elkaar in strijd blijken.

waarde, maar evenzeer voor een onsplitsbare twee-voudige voorwaarde geldt. Het theorema van CREMONA luidt dus:

Voor een kegelsnede in een vast vlak kan iedere twee-voudige voorwaarde homogeen en lineair in ieder drietal andere twee-voudige voorwaarden worden uitgedrukt.

Voor dat drietal kiezen we steeds μ^2, $\mu\nu$ en ν^2, zoodat iedere twee-voudige voorwaarde z wordt voorgesteld door

$$z = \alpha\mu^2 + \beta\mu\nu + \gamma\nu^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waarin α, β, γ van de vooorwaarde z afhangen, maar niet van het systeem van de 2de orde, waarop de vergelijking wordt toegepast.

De stelling van CREMONA kan ook aldus worden uitgesproken:

Bij een kegelsnede in een vast vlak is het twee- en het drie-voudige karakteristiekengetal gelijk aan drie.

Een bewijs hiervoor is nog geleverd door HALPHEN (29 *Bull. de la Soc. Math. t.* 1 p. 233 - 235).

Om de coëfficienten α, β, γ te bepalen schrijven we de karakteristiekenformule in den vorm van vergelijking (7)′ (p. 57) en kiezen daarbij voor de drie drie-voudige voorwaarden c_1, c_2 en c_3 de voorwaarden $\delta\nu^2$, $\eta\mu^2$, $\delta\mu\nu$. Men vindt dan, lettend op de vergelijkingen (4) (p. 44):

$$\begin{vmatrix} z & \mu^2 & \mu\nu & \nu^2 \\ \delta\nu^2 z & \delta\nu^2\mu^2 & \delta\mu\nu^3 & \delta\nu^4 \\ \eta\mu^2 z & \eta\mu^4 & \eta\mu^3\nu & \eta\mu^2\nu^2 \\ \delta\mu\nu z & \delta\mu^2\nu & \delta\mu^2\nu^2 & \delta\mu\nu^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & \mu^2 & \mu\nu & \nu^2 \\ \delta\nu^2 z & 4 & 0 & 0 \\ \eta\mu^2 z & 0 & 0 & 4 \\ \delta\mu\nu z & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ons interesseeren nu hoofdzakelijk de beide onsplitsbare twee-voudige aanrakingsvoorwaarden, t. w. de voorwaarde van twee-voudige aanraking en die van tweemaal enkelvoudige aanraking met een gegeven kromme.

Is z de voorwaarde van twee-voudige aanraking, dan is $\delta\nu^2 z = 0$;

immers de voorwaarde $\delta_\nu{}^2 z$ houdt nu in, dat de kegelsnede degenereert in twee rechten, waarvan er één buigraaklijn is, en dat het snijpunt dier rechten tevens dat der beide bij de voorwaarde ν^2 behoorende rechten is. Evenzoo is ook $_\eta\mu^2 z = 0$. Aan de voorwaarde $\delta_{\mu\nu} z$ voldoen: 1ste. De lijnenparen bestaande uit een buigraaklijn en de verbindingslijn van het punt p der voorwaarde μ met het snijpunt van de buigraaklijn met de lijn l der voorwaarde ν; ieder dier (β) [1]) lijnenparen moet echter volgens de in § 6 besproken door ZEUTHEN gegeven regels *tweemaal* geteld worden, daar alleen aan de voorwaarde ν oneigenlijk voldaan wordt; 2de. De n lijnenparen bestaande uit de verbindingslijn van p met een der n snijpunten q van l met de gegeven kromme (wier graad n is) en de raaklijn in q aan die kromme; ook dit zijn oneigenlijke oplossingen, waarvan ieder ξ maal telt, waarin ξ een nog te bepalen getallencoëfficient is. Men vindt zoo dus $\delta_{\mu\nu} z = 2(\beta) + \xi n$, en dus voor de karakteristiekenformule:

$$\begin{vmatrix} z & \mu^2 & \mu\nu & \nu^2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2(\beta) + \xi n & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

of:

$$4z = (2(\beta) + \xi n)\,\mu\nu\,.$$

Reciprook hiermede is:

$$4z = (2\varkappa + \xi k)\,\mu\nu\,.$$

Door gelijkstelling van deze beide uitdrukkingen voor z vindt men in verband met $(\beta) - \varkappa = 3(k-n)$, dat $\xi = 6$ is; hieruit volgt

---

[1]) Voor het aantal buigpunten der gegeven kromme schrijven we ter onderscheiding (β), een onderscheiding, die we als verwarring niet meer mogelijk is weer loslaten.

(als we met CAYLEY $(\beta) + 3n = \varkappa + 3k$ door één enkele letter (α) [1]) voorstellen):

$$(2) = \tfrac{1}{2}(\alpha)\,\mu\nu\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

waarin we z door (2), de voorwaarde van aanraking van de 2de orde, vervangen hebben.

Op overeenkomstige hoewel minder eenvoudige wijze kan men de voorwaarde (1, 1) van dubbele aanraking aan een gegeven kromme in de karakteristieken uitdrukken. Men vindt dan:

$$(1\,,1) = \tfrac{1}{2}\,k\,(k-1)\,\mu^2 + (nk - {}^3/_4(\alpha))\,\mu\nu + \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,\nu^2. \quad (10)$$

Evenals de twee-voudige zijn nu ook de drie-voudige voorwaarden in *drie* karakteristieken uit te drukken. Tusschen de vier elementaire voorwaarden μ^3, $\mu^2\nu$, $\mu\nu^2$, ν^3 zal dus *één* betrekking bestaan, die weer onmiddellijk uit (7)′ (p. 57) is af te leiden door voor de twee-voudige voorwaarden c de voorwaarden μ^2, $\mu\nu$ en ν^2 te kiezen. Men krijgt dan:

$$\begin{vmatrix} \mu^3 & \mu^2\nu & \mu\nu^2 & \nu^3 \\ \mu^5 & \mu^4\nu & \mu^3\nu^2 & \mu^2\nu^3 \\ \mu^4\nu & \mu^3\nu^2 & \mu^2\nu^3 & \mu\nu^4 \\ \mu^3\nu^2 & \mu^2\nu^3 & \mu\nu^4 & \nu^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu^3 & \mu^2\nu & \mu\nu^2 & \nu^3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

of:

$$2\mu^3 - 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2 - 2\nu^3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

In drie dier elementairvoorwaarden kan nu iedere drie-voudige voorwaarde worden uitgedrukt. Om de symmetrie te behouden is het echter voordeeliger alle vier de elementairvoorwaarden te gebruiken, bedenkend dat die door de vergelijking (11) aan elkaar verbonden zijn.

Om van een drie-voudige voorwaarde z den modulus te kunnen vinden heeft men slechts de *elementairgetallen* dier voorwaarde

[1]) CAYLEY gebruikt in 3 en elders de letter α. Wij schrijven als verwarring mogelijk is daarvoor (α).

te kennen, d.w.z. de aantallen kegelsneden, die behalve aan de voorwaarde z nog aan een der elementaire twee-voudige voorwaarden μ^2, $\mu\nu$, ν^2 voldoen. De elementairgetallen worden dus voorgesteld door $z\mu^2$, $z\mu\nu$, $z\nu^2$, waarvoor we kortheidshalve p, q, r schrijven. Daar het aantal karakteristieken *drie* bedraagt, zijn de drie elementairgetallen van elkaar onafhankelijk.

Volgens vergelijking (7)′ is nu weer

$$\left\| \begin{matrix} z & \mu^3 & \mu^2\nu & \mu\nu^2 & \nu^3 \\ p & 1 & 2 & 4 & 4 \\ q & 2 & 4 & 4 & 2 \\ r & 4 & 4 & 2 & 1 \end{matrix} \right\| = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Door naar willekeur een der laatste vier kolommen weg te laten krijgt men z in drie elementairvoorwaarden uitgedrukt.

De elementairgetallen kunnen verder bepaald worden door in $z\mu^2$, $z\mu\nu$, $z\nu^2$ één der elementairvoorwaarden met behulp van de vergelijkingen (2) en (3) in de degeneratievoorwaarden δ en η uit te drukken, waardoor men vindt:

$$\begin{aligned} p &= z\mu^2 = {}^1/_3\, z\mu\delta + {}^2/_3\, z\mu\eta\,, \\ q &= z\nu^2 = {}^2/_3\, z\nu\delta + {}^1/_3\, z\nu\eta\,, \\ r &= z\mu\nu = {}^1/_3\, z\nu\delta + {}^2/_3\, z\nu\eta = {}^2/_3\, z\mu\delta + {}^1/_3\, z\mu\eta\,. \end{aligned}$$

Zijn nu drie der vier *elementair-degeneratiegetallen* $z\mu\delta$, $z\mu\eta$, $z\nu\delta$, $z\nu\eta$ bekend, dan kan volgens bovenstaande vergelijkingen het vierde berekend worden, en daaruit weer de drie elementairgetallen.

Is nu weer z een der onsplitsbare drie-voudige aanrakingsvoorwaarden (1 , 1 , 1), (2 , 1) en (3), dan zijn de elementair-degeneratiegetallen onmiddellijk uit de in § 6 besproken onderzoekingen van ZEUTHEN af te leiden. Immers de voorwaarde μ vordert de aanraking aan een kromme van den graad *nul* en de klasse *één*, zoodat b.v. de voorwaarde (1 , 1 , 1) μ een bijzonder geval is van de voorwaarde (1 , 1 , 1) (1). Daar nu ZEUTHEN voor alle dergelijke

vier-voudige aanrakingsvoorwaarden de beide *degeneratiegetallen* δ en η bepaald heeft, zijn hiermede ook de elementair-degeneratiegetallen der drie-voudige aanrakingsvoorwaarden gevonden en dus ook hun moduli.

Een vier-voudige voorwaarde z is in *twee* karakteristieken uit te drukken, zooals blijkens de stelling van SCHUBERT een onmiddellijk gevolg van de stelling van CHASLES is. De beide elementairgetallen $z\mu$ en $z\nu$ zijn ook nu van elkaar onafhankelijk. In de plaats daarvan kan men echter met voordeel de beide degeneratiegetallen $z\delta$ en $z\eta$ invoeren. Uit vergelijking (7)' volgt dan:

$$\begin{Vmatrix} z & \mu^4 & \mu^3\nu & \mu^2\nu^2 & \mu\nu^3 & \nu^4 \\ z\delta & \mu^4\delta & \mu^3\nu\delta & \mu^2\nu^2\delta & \mu\nu^3\delta & \nu^4\delta \\ z\eta & \mu^4\eta & \mu^3\nu\eta & \mu^2\nu^2\eta & \mu\nu^3\eta & \nu^4\eta \end{Vmatrix} = 0 ,$$

of volgens de vergelijkingen (4) (p. 44):

$$\begin{Vmatrix} z & \mu^4 & \mu^3\nu & \mu^2\nu^2 & \mu\nu^3 & \nu^4 \\ z\delta & 3 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ z\eta & 0 & 0 & 4 & 6 & 3 \end{Vmatrix} = 0 .$$

Door weglating van drie kolommen krijgt men z in twee elementairvoorwaarden uitgedrukt, dus de karakteristiekenformule. Kiest men μ^4 en ν^4 als karakteristieken dan luidt die formule:

$$z = {}^1/_3\,(z\delta) \,.\, \mu^4 + {}^1/_3\,(z\eta) \,.\, \nu^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Door de eerste en nog twee andere kolommen weg te laten vindt men de drie betrekkingen, die er tusschen de 5 elementairvoorwaarden bestaan. Deze zijn:

$$\left.\begin{aligned} \mu^3\nu &= 2\mu^4 \quad , \\ \mu\nu^3 &= 2\nu^4 \quad , \\ 4(\mu^4 + \nu^4) &= 3\mu^2\nu^2 \ . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Voor het geval, dat z een der 5 onsplitsbare vier-voudige aanrakingsvoorwaarden (1, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2), (3, 1) en (4) is,

zijn de degeneratiegetallen z_δ en z_η op de in § 6 besproken wijze door ZEUTHEN bepaald. Volgens vergelijking (13) zijn dan ook de moduli dier voorwaarden gevonden.

Uit het voorgaande volgt, dat van alle 1-, 2-, 3- en 4-voudige aanrakingsvoorwaarden de moduli gevonden zijn zoodra de aantallen lijnenparen en puntenparen bekend zijn, die aan die voorwaarden voldoen en eventueel aan zooveel elementairvoorwaarden als voor hunne bepaling noodig is. Al die moduli zijn dus in verband met de theorema's van CHASLES en CREMONA uit de uitkomsten van ZEUTHEN af te leiden.

---

§ 11. *Samengestelde voorwaarden.*

In de vorige paragraaf hebben we besproken hoe de moduli van aanrakingsvoorwaarden gevonden kunnen worden. De modulus van een uit aanrakingsvoorwaarden samengestelde voorwaarde en het aantal kegelsneden, die aan een vijf-voudige uit aanrakingsvoorwaarden samengestelde voorwaarde voldoen, wordt dan door symbolische vermenigvuldiging gevonden, waarbij in het laatste geval μ^5, $\mu^4\nu$, $\mu^3\nu^2$, $\mu^2\nu^3$, $\mu\nu^4$, ν^5 door hun waarden 1, 2, 4, 4, 2, 1 vervangen worden. We stellen nu een één-, twee-, drie- en vier-voudige voorwaarde resp. door x, x', x'' en x''' voor en hun moduli (die we volgens § 10 als bekend onderstellen) door:

$$x = \alpha\mu + \beta\nu\,,$$
$$x' = \alpha'\mu^2 + \beta'\mu\nu + \gamma'\nu^2\,,$$
$$x'' = \alpha''\mu^3 + \beta''\mu^2\nu + \gamma''\mu\nu^2 + \delta''\nu^3\,,$$
$$x''' = \alpha'''\mu^4 + \beta'''\nu^4\,,$$

waarbij we bij een drie-voudige voorwaarde op de betrekking (11) tusschen de elementairvoorwaarden te letten hebben. Verschillende voorwaarden van dezelfde dimensie zullen we door indices

van elkaar onderscheiden. Door symbolische vermenigvuldiging vindt men dan, als men met behulp van (14) de voorwaarden $\mu^3\nu$, $\mu^2\nu^2$ en $\mu\nu^3$ in μ^4 en ν^4 uitdrukt:

$$x' = x_1x_2 = \alpha_1\alpha_2\mu^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\,\mu\nu + \beta_1\beta_2\nu^2\,, \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$x'' = x_1x_2x_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\mu^3 + \Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 \,.\, \mu^2\nu + \\ + \Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 \,.\, \mu\nu^2 + \beta_1\beta_2\beta_3\nu^3\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$x'' = xx' = \alpha\alpha'\mu^3 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\mu^2\nu + (\alpha\gamma' + \beta\beta')\mu\nu^2 + \beta\gamma'\nu^3\,, \quad . \quad (17)$$

$$x''' = x_1x_2x_3x_4 = [\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4 + {}^4/_3\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4]\mu^4 + \\ + [\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 + 2\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4 + {}^4/_3\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4]\nu^4, \quad (18)$$

$$x''' = x_1x_2x' = [\alpha_1\alpha_2(\alpha' + 2\beta' + {}^4/_3\gamma') + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(2\alpha' + {}^4/_3\beta') + \\ + {}^4/_3\,\beta_1\beta_2\alpha']\,\mu^4 + \\ + [\beta_1\beta_2(\gamma' + 2\beta' + {}^4/_3\alpha') + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(2\gamma' + {}^4/_3\beta') + \\ + {}^4/_3\,\alpha_1\alpha_2\gamma']\,\nu^4\,, \quad (19)$$

$$x''' = x'_1x'_2 = [\alpha'_1(\alpha'_2 + 2\beta'_2 + {}^4/_3\gamma'_2) + \beta'_1(2\alpha'_2 + {}^4/_3\beta'_2) + {}^4/_3\gamma'_1\alpha'_2]\mu^4 + \\ + [\gamma'_1(\gamma'_2 + 2\beta'_2 + {}^4/_3\alpha'_2) + \beta'_1(2\gamma'_2 + {}^4/_3\beta'_2) + {}^4/_3\alpha'_1\gamma'_2]\nu^4, (20)$$

$$x''' = xx'' = [\alpha\,(\alpha'' + 2\beta'' + {}^4/_3\,\gamma'') + \beta\,(2\alpha'' + {}^4/_3\,\beta'')\,]\,\mu^4 + \\ + [\beta\,(\delta'' + 2\gamma'' + {}^4/_3\,\beta'') + \alpha\,(2\delta'' + {}^4/_3\,\gamma'')\,]\,\nu^4\,, \quad (21)$$

$$x'''' = x_1x_2x_3x_4x_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_5 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4\beta_5 + \\ + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 + 2\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\beta_5\,, (22)$$

$$x'''' = x_1x_2x_3x' = \alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha' + 2\beta' + 4\gamma') + (2\alpha' + 4\beta' + 4\gamma')\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + \\ + \beta_1\beta_2\beta_3(4\alpha' + 2\beta' + \gamma') + (4\alpha' + 4\beta' + 2\gamma')\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\,, \quad (23)$$

$$x'''' = xx'_1x'_2 = (\alpha + 2\beta)\alpha'_1\alpha'_2 + (2\alpha + 4\beta)(\alpha'_1\beta'_2 + \alpha'_2\beta'_1) + \\ + (4\alpha + 4\beta)(\alpha'_1\gamma'_2 + \alpha'_2\gamma'_1 + \beta'_1\beta'_2) + \\ + (2\alpha + \beta)\gamma'_1\gamma'_2 + (4\alpha + 2\beta)(\beta'_1\gamma'_2 + \beta'_2\gamma'_1)\,, \quad . \quad . \quad (24)$$

$$x'''' = x_1x_2x'' = \alpha_1\alpha_2(\alpha'' + 2\beta'' + 4\gamma'' + 4\delta'') + \\ + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(2\alpha'' + 4\beta'' + 4\gamma'' + 2\delta'') + \\ + \beta_1\beta_2(4\alpha'' + 4\beta'' + 2\gamma'' + \delta''), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$x'''' = x'x'' = \alpha'\alpha'' + 2(\alpha'\beta'' + \beta'\alpha'') + 4(\alpha'\gamma'' + \beta'\beta'' + \gamma'\alpha'') + \\ + \gamma'\delta'' + 2(\gamma'\gamma'' + \beta'\delta'') + 4(\gamma'\beta'' + \beta'\gamma'' + \alpha'\delta'') \,, \quad . \quad (26)$$

$$x'''' = xx''' = \alpha\alpha''' + 2\alpha\beta''' + 2\beta\alpha''' + \beta\beta''' . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Hierin is $\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3$ een afkorting voor $\alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\alpha_3\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_1$, enz.

Op deze wijze kunnen dus alle aantallen kegelsneden gevonden worden, die aan een vijf-voudige samengestelde aanrakingsvoorwaarde voldoen, t. w.:

(1) (1) (1) (1) (1) , (2) (1) (1) (1) , (2) (2) (1) , (3) (1) (1), (3) (2) , (4) (1),
(1 , 1) (1) (1) (1) , (2) (1 , 1) (1) , (2) (2 , 1) , (3) (1 , 1),
(1 , 1) (1 , 1) (1) , (2) (1 , 1 , 1) , (2 , 2) (1) , (3 , 1) (1) ,
(1 , 1 , 1) (1) (1) , (2 , 1) (1) (1) ,
(1 , 1 , 1) (1 , 1) , (2 , 1) (1 , 1) ,
(1 , 1 , 1 , 1) (1) , (2 , 1 , 1) (1) .

Als voorbeeld kiezen we het door CHASLES bepaalde aantal kegelsneden, die vijf gegeven krommen aanraken. Dan is:

$$x_1 = k_1\mu + n_1\nu \,,$$
$$\text{enz.} \quad ,$$

zoodat volgens vergelijking (22) het gezochte aantal bedraagt:

$$(1)(1)(1)(1)(1) = k_1k_2k_3k_4k_5 + 2\Sigma k_1k_2k_3k_4n_5 + 4\Sigma k_1k_2k_3n_4n_5 + \\ + n_1n_2n_3n_4n_5 + 2\Sigma k_1n_2n_3n_4n_5 + 4\Sigma k_1k_2n_3n_4n_5 \quad . \quad (28)$$

Hierin stellen $n_1, \ldots, n_5$ de graden, $k_1, \ldots, k_5$ de klassen der gegeven krommen voor.

Als tweede voorbeeld bepalen we het aantal kegelsneden, die twee gegeven krommen C_{n_1} en C_{n_2} twee-voudig aanraken en een andere gegeven kromme C_n enkelvoudig.

Volgens vergelijking (9) is de voorwaarde x_1' van twee-voudige aanraking aan C_{n_1}:

$$x_1' = \tfrac{1}{2}(\alpha_1)\,\mu\,\nu \,,$$

waarin $(\alpha_1) = 3n_1 + (\beta_1) = 3k_1 + \kappa_1$ is. Nu is dus in vergelijking (24):

$$\alpha'_1 = \gamma'_1 = 0 \ , \ \beta'_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha_1) \, ,$$

en evenzoo:

$$\alpha'_2 = \gamma'_2 = 0 \ , \ \beta'_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha_2) \, ,$$

terwijl

$$\alpha = k \ , \ \beta = n$$

is. Volgens (24) is dus het gezochte aantal:

$$(2)(2)(1) = (\alpha_1)(\alpha_2)(k+n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Als laatste voorbeeld diene nog het aantal kegelsneden, die een gegeven kromme C_{n_1} drie-voudig en een andere gegeven kromme C_{n_2} twee-voudig aanraken. Daartoe maken we gebruik van de door ZEUTHEN bepaalde karakteristieken μ en ν van het systeem der kegelsneden, die een kromme C_{n_1} drie-voudig en een kromme C_n enkelvoudig aanraken. Hij geeft daarvoor op (23 *Nouv. Annales* (2) *t.* 5, p. 489):

$$\mu = 2(3(\alpha_1) - 4n_1 - 4k_1)n + (3(\alpha_1) - 4n_1 - 3k_1)k \, ,$$
$$\nu = (3(\alpha_1) - 4n_1 - 4k_1)n + 2(3(\alpha_1) - 4n_1 - 4k_1)k \, .$$ [1])

Door voor de kromme C_n eerst een punt ($n = 0$, $k = 1$) te nemen en daarna een rechte lijn ($n = 1$, $k = 0$) vindt men hieruit voor de karakteristieken van het systeem van de tweede orde der kegelsneden, die C_n drie-voudig aanraken:

$$\left.\begin{aligned} (3)\,\mu^2 &= 3(\alpha_1) - 4n_1 - 3k_1 \ , \\ (3)\,\mu\nu &= 2(3(\alpha_1) - 4n_1 - 4k_1) \ , \\ (3)\,\nu^2 &= 3(\alpha_1) - 3n_1 - 4k_1 \ . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Daar nu de modulus der twee-voudige voorwaarde de kromme C_{n_2} twee-voudig aan te raken volgens vergelijking (9):

---

[1]) De notatie van ZEUTHEN is een andere. ZEUTHEN gebruikt ook niet de door CAYLEY ingevoerde grootheid (α).

$$(2) = x'' = \tfrac{1}{2}(\alpha_2)\,\mu\nu$$

is, vindt men voor het gevraagde aantal:

$$(3)\,(2) = (3(\alpha_1) - 4n_1 - 4k_1)\,(\alpha_2) \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Ten slotte zij nog opgemerkt, dat de HALPHEN'sche beschouwingen aan de juistheid van al deze resultaten niets af doen.

DERDE HOOFDSTUK.

METHODEN, DIE AAN DE KARAKTERISTIEKEN-THEORIE AANSLUITEN.

§ 12. *Methode van* CAYLEY *ter bepaling van het aantal kegelsneden, die aan een onsplitsbare vijf-voudige aanrakingsvoorwaarde voldoen.*

De in de vorige paragrafen besproken methoden van CHASLES en ZEUTHEN zijn niet toereikend om het aantal kegelsneden te vinden, die aan een onsplitsbare vijf-voudige aanrakingsvoorwaarde voldoen. Ter bepaling blijven dus nog de volgende zeven aantallen over:

$$(1,1,1,1,1)\ ,\ (2,1,1,1)\ ,\ (2,2,1)\ ,\ (3,1,1)\ ,\ (3,2)\ ,\ (4,1)\ ,\ (5).$$

Deze aantallen zijn het eerst berekend door CAYLEY (79 *Comptes Rendus t.* 63, 3 *Phil. Trans. Vol.* 158, art. 53—61) [1]) met behulp van de methode der functionaalvergelijkingen. Deze functionaalvergelijkingen worden verkregen door de kromme, waarop de aanrakingsvoorwaarde betrekking heeft, in twee krommen C_{n_1} en C_{n_2} te laten degenereeren. Ondersteld wordt hierbij, dat de gegeven kromme geen andere dan PLÜCKER'sche singulariteiten heeft, in

---

[1]) In de *Comptes Rendus* zijn in de uitdrukking voor (1, 1, 1, 1, 1) eenige coëfficienten verkeerd opgegeven, een fout die in de *Phil. Trans.* hersteld is.

welk geval de grootheden n, k en α $(= 3n + \beta = 3k + \varkappa)$ [1]) volstaan om alle in de PLÜCKER'sche vergelijkingen optredende grootheden te vinden. De gezochte aantallen zijn dus als functies van n, k en α op te vatten.

Beschouwen we eerst het aantal $(5)_n$, waarbij de index n aangeeft, dat de aanrakingsvoorwaarde op een kromme C_n betrekking heeft. Laat men nu C_n degenereeren in twee krommen C_{n_1} en C_{n_2}, dan is

$$n = n_1 + n_2 ,$$
$$k = k_1 + k_2 ,$$
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 .$$

De kegelsneden, die C_n 5-voudig aanraken, zijn nu de kegelsneden, die C_{n_1}, en de kegelsneden, die C_{n_2} 5-voudig aanraken, zoodat men heeft:

$$(5)_{n_1 + n_2} = (5)_{n_1} + (5)_{n_2}.$$

Men heeft dus de volgende functionaalvergelijking op te lossen:

$$\varphi(n_1 + n_2, k_1 + k_2, \alpha_1 + \alpha_2) - \varphi(n_1, k_1, \alpha_1) - \varphi(n_2, k_2, \alpha_2) = 0.$$

De oplossing daarvan luidt:

$$(5) = \varphi(n, k, \alpha) = an + bk + c\alpha,$$

waarin a, b en c constanten zijn. Daar het aanrakingsprobleem met zich zelf reciprook is, moet het gezochte aantal bij verwisseling van n en k (waarbij $\varkappa$ onveranderd blijft) niet veranderen, waaruit volgt dat $a = b$ is, dus:

$$(5) = a(n + k) + c\alpha , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

waarin a en c nog nader te bepalen getallen zijn.

Evenzoo vindt men voor (4,1) de volgende functionaalvergelijking:

---

[1]) Daar er geen verwarring meer mogelijk is, schrijven we weer α en β in plaats van (α) en (β).

$$(4,1)_{n_1+n_2} - (4,1)_{n_1} - (4,1)_{n_2} = (4)_{n_1}(1)_{n_2} + (4)_{n_2}(1)_{n_1},$$

waarin $(4)_{n_1}(1)_{n_2}$ het aantal kegelsneden voorstelt, die aan C_{n_1} een aanraking van de 4de orde en aan C_{n_2} een aanraking van de 1ste orde vertoonen, met een analoge beteekenis voor $(4)_{n_2}(1)_{n_1}$. Daar nu volgens de vorige paragraaf alle aantallen kegelsneden, die aan een splitsbare vijf-voudige voorwaarde voldoen, als bekend kunnen worden beschouwd, is het tweede lid der functionaalvergelijking een bekende functie van n_1, k_1, α_1, n_2, k_2, α_2. Heeft men nu een particuliere oplossing verkregen, die symmetrisch is ten opzichte van n en k, dan luidt de algemeene oplossing der functionaalvergelijking:

$$(4,1) = \textit{particuliere opl.} + a(n+k) + c\alpha,$$

daar ook (4,1) bij verwisseling n en k niet veranderen mag.

Op dezelfde wijze kan men ter bepaling der vijf andere aantallen functionaalvergelijkingen opstellen. Als oplossing vindt men dan steeds een geheel bekende particuliere oplossing $+a(n+k)+c\alpha$. In al die gevallen komt het dus nog slechts op de bepaling der twee constanten a en c aan.

Zoo kunnen dus a en c gevonden worden, zoodra in twee bijzondere gevallen het gezochte aantal bekend is, daar men dan twee vergelijkingen krijgt om a en c op te lossen. Nu is, behalve in het geval (5), het gezamenlijk aantal in de raakpunten vallende snijpunten van de kegelsnede met de gegeven kromme grooter dan zes (voor (4 , 1) en (3 , 2) is dit aantal 7, voor (3 , 1 , 1) en (2 , 2 , 1) is dit 8, voor (2 , 1 , 1 , 1) is het 9 en voor (1 , 1 , 1 , 1 , 1) is dit aantal 10). Is de gegeven kromme dus een kubische kromme, dan zijn er geen kegelsneden mogelijk, die aan de vraag voldoen en is het gezochte aantal dus bekend, n.l. *nul*. Dit sluit echter de volgende drie gevallen in:

De C_3 heeft geen punt-singulariteiten; $n=3$, $k=6$, $\alpha=18$.
De C_3 heeft een dubbelpunt ; $n=3$, $k=4$, $\alpha=12$.
De C_3 heeft een keerpunt ; $n=3$, $k=3$, $\alpha=10$.

In *drie* gevallen is dus het aantal oplossingen bekend, zoodat men a en c kan oplossen en bovendien nog een controle heeft.

Het aantal (5) is daarentegen niet nul voor $n = 3$. Voor dat geval is echter het gezochte aantal gemakkelijk aan te geven. Volgens een stelling van HESSE (**76** *Crelle's Journal Bd.* 36, p. 173, stelling n⁰. 19) zijn n.l. de raakpunten der raaklijnen, die vanuit de buigpunten eener kubische kromme aan die kromme getrokken kunnen worden, de punten waarin een kegelsnede een aanraking van de 5de orde vertoonen kan [1]); deze punten zijn door CAYLEY [2]) *sextactische punten* genoemd. Volgens de stelling van HESSE is dus het aantal sextactische punten eener kubische kromme met β buigpunten $(k-3)\beta$, daar uit een buigpunt aan de kromme drie raaklijnen minder getrokken kunnen worden dan vanuit een willekeurig punt. In de drie bovenbeschouwde gevallen ($k = 6, 4, 3$) is dus het aantal sextactische punten resp. $27, 3, 0$. Men heeft dus blijkens de vergelijking (a) de volgende vergelijkingen om a en c te bepalen:

$$9a + 18c = 27\,,$$
$$7a + 12c = 3\,,$$
$$6a + 10c = 0\,,$$

waaruit volgt:

$$a = -15\,, \quad c = 9\,.$$

Men vindt dus:

$$(5) = -15\,(n + k) + 9\alpha\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

of daar $\alpha = 3k + \varkappa$ is:

---

[1]) Zie ook **32** SALMON—FIEDLER. *Höh. Kurven*, p. 173 of **31** CLEBSCH—LINDEMANN. *Bd.* 1, p. 535.

[2]) **78** *Phil. Trans. Vol.* 155, alwaar CAYLEY het aantal sextactische punten voor een punt-algemeene kromme van den $n$den graad bepaalt door de vergelijking eener kromme op te stellen, die uit de oorspronkelijke kromme de sextactische punten uitsnijdt.

$$(5) = -15n + 12k + 9\varkappa\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)'$$

of volgens $k = n(n-1) - 2\delta - 3\varkappa$:

$$(5) = 3n(4n - 9) - 24\delta - 27\varkappa. \quad . \quad . \quad . \quad (32)''$$

Op deze wijze bepaalt CAYLEY alle aantallen kegelsneden, die aan een vijf-voudige onsplitsbare aanrakingsvoorwaarde voldoen. Als voorbeeld kiezen we nog de bepaling van (3, 2). De functionaalvergelijking luidt:

$$(3,2)_{n_1+n_2} - (3,2)_{n_1} - (3,2)_{n_2} = (3)_{n_1}(2)_{n_2} + (3)_{n_2}(2)_{n_1}.$$

Hierin is volgens vergelijking (31):

$$(3)_{n_1}(2)_{n_2} = (3\alpha_1 - 4n_1 - 4k_1)\,\alpha_2\,,$$
$$(3)_{n_2}(2)_{n_1} = (3\alpha_2 - 4n_2 - 4k_2)\,\alpha_1\,,$$

zoodat de functionaalvergelijking wordt:

$$(3,2)_{n_1+n_2} - (3,2)_{n_1} - (3,2)_{n_2} = -4(n_1\alpha_2 + n_2\alpha_1) - 4(k_1\alpha_2 + k_2\alpha_1) + 6\alpha_1\alpha_2\,.$$

De oplossing hiervan is:

$$(3,2) = -4(n+k)\,\alpha + 3\alpha^2 + a(n+k) + c\alpha\,.$$

Past men dit toe op de drie soorten van kubische krommen, dan vindt men (daar in al die gevallen $(3,2) = 0$ is):

$$0 = 324 + 9a + 18c\,,$$
$$0 = 96 + 7a + 12c\,,$$
$$0 = 60 + 6a + 10c\,,$$

dus $a = 120$, $c = -78$. Men vindt zoo:

$$(3,2) = 120(n+k) - (78 + 4n + 4k)\,\alpha + 3\alpha^2\,. \quad . \quad (33)$$

CAYLEY (3 *Phil. Trans. Vol.* 158, art. 62—73) bepaalt verder nog de aantallen kegelsneden, die aan een vijf-voudige aanrakingsvoorwaarde voldoen, die het gaan door een gegeven punt eener gegeven kromme behelst (of algemeener aan een gege-

ven kromme in een gegeven punt een aanraking van voorgeschreven orde te vertoonen) en bovendien vordert die kromme in een of meer niet-gegeven punten te moeten aanraken. CAYLEY schrijft voor de voorwaarde door een gegeven punt van de gegeven kromme te gaan $(\bar{1})$, voor de voorwaarde de gegeven kromme in een gegeven punt aan te raken $(\bar{2})$, enz. Zoo stelt dus bv. $(\bar{3}, 1, 1)$ het aantal kegelsneden voor, die een gegeven kromme in een gegeven punt drie-puntig en nog in twee andere niet gegeven punten enkelvoudig aanraken. Deze vragen kunnen beantwoord worden met behulp van de methode van ZEUTHEN, die bestaat in het opzoeken van het aantal lijnenparen en puntenparen in door dergelijke voorwaarden bepaalde systemen van de eerste orde, of met de methode der functionaalvergelijkingen.

In het bijzonder beschouwt CAYLEY nog nader het geval, dat het gegeven punt van de gegeven kromme een keerpunt is. Voor de voorwaarde door dat keerpunt te gaan schrijft CAYLEY $(\overline{1\,\varkappa\,1})$ en voor de voorwaarde de kromme in het keerpunt aan te raken $(\overline{2\,\varkappa\,1})$. Het cijfer voor $\varkappa$ geeft dan de dimensie der voorwaarde aan, terwijl de $\bar{1}$ achter $\varkappa$ aangeeft, dat er nog een snijpunt meer in het gegeven punt valt dan wanneer dit geen keerpunt is.

Als voorbeeld bepalen we het aantal $(\overline{2\,\varkappa\,1}, 3)$, d. i. het aantal kegelsneden, die een gegeven kromme in een keerpunt en bovendien elders nog eens drie-voudig aanraken. Daartoe laten we de gegeven kromme C_n degenereeren in een kromme C_{n_1}, die het keerpunt in quaestie bevat, en een kromme C_{n_2}. Het aantal $(\overline{2\,\varkappa\,1}, 3)_{n_1+n_2}$ bestaat dan uit het aantal $(\overline{2\,\varkappa\,1}, 3)_{n_1}$ en uit het aantal kegelsneden, die in een gegeven punt (het keerpunt in quaestie, dat niet op C_{n_2} ligt) een gegeven raaklijn hebben en bovendien de kromme C_{n_2} drie-voudig aanraken; dit laatste aantal bedraagt $(3)_{n_2}\,\mu^2$, dus volgens de eerste vergelijking (30): $3\alpha_2 - 4n_2 - 3k_2$, welk aantal echter wegens het samenvallen der beide bij de voorwaarde μ^2 behoorende punten met k_2 verminderd moet worden. Immers de raaklijnen

van uit het keerpunt in quaestie aan C_{n_2} getrokken voldoen als dubbel rechten oneigenlijk aan de vraag, ieder met een multipliciteit x. Men vindt zoo $(3)_{n_2}\mu^2 = 3\alpha_2 - 4n_2 - (3+x)k_2$. Daar dit aantal als de beide punten der voorwaarde μ^2 samenvallen echter ten duidelijkste met zich zelf reciprook is, moet $x=1$ zijn. De functionaalvergelijking wordt dus:

$$(\overline{2\varkappa 1}\,,3)_{n_1+n_2} - (\overline{2\varkappa 1}\,,3)_{n_1} = -4n_2 - 4k_2 + 3\alpha_2\,.$$

In dit geval is, evenals in de andere gevallen van de beschouwde soort, de functionaalvergelijking van den vorm:

$$\varphi(n_1+n_2, k_1+k_2, \alpha_1+\alpha_2) - \varphi(n_1, k_1, \alpha_1) = F(n_1, k_1, \alpha_1, n_2, k_2, \alpha_2),$$

waarin F een bekende functie is. De oplossing dier functionaalvergelijking is steeds van den vorm:

particuliere oplossing + *constante*,

zoodat ter nadere bepaling slechts *één* constante overblijft, die gevonden is zoodra in *één* bijzonder geval de uitkomst bekend is.

In het gekozen voorbeeld is de oplossing derhalve:

$$(\overline{2\varkappa 1}, 3) = -4n - 4k + 3\alpha + c.$$

Daar de beide krommen in het keerpunt en in het punt van aanraking van de 3de orde te zamen 7 snijpunten hebben, moet het gezochte aantal voor een kubische kromme met keerpunt $(n=k=3, \alpha=10)$ *nul* zijn, waaruit volgt, dat $c=-6$ is. Men vindt dus in overeenstemming met CAYLEY (3 art. 73):

$$(\overline{2\varkappa 1}, 3) = -4n - 4k + 3\alpha - 6 \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

---

§ 13. SCHUBERT'S *methode ter bepaling van aantallen krommen van hoogeren dan den tweeden graad.*

Voor krommen van hoogeren dan den 2den graad is het niet gelukt het karakteristiekenprobleem op te lossen, ook niet als men een zeker soort degeneraties uit de beschouwde systemen uitgesloten denkt. Echter ook zonder dat voor een figuur r het karakteristiekenprobleem is opgelost kunnen op die figuur betrekking hebbende aantallen gevonden worden. Onderstel n.l. dat het gelukt is eenige voorwaarden in een zeker aantal (b.v. i) eenvoudige voorwaarden $a_1, a_2, \ldots, a_i$ uit te drukken, dan kunnen dezelfde methoden worden toegepast als voor figuren, waarvoor het karakteristiekenprobleem wel is opgelost. Alleen blijft dan geheel in het midden gelaten of er tusschen de voorwaarden $a_1, a_2, \ldots, a_i$ nog een betrekking bestaat en of die voorwaarden ook voldoende zijn om *alle* voorwaarden (desnoods met zekere nauwkeurig omschreven beperking) in uit te drukken. De onderzoekingen beperken zich dan natuurlijk geheel tot die voorwaarden, waarvoor de uitdrukbaarheid in $a_1, a_2, \ldots, a_i$ is aangetoond.

Als voorbeeld kiezen we de aan een kromme in een vast vlak opgelegde voorwaarde een gegeven kromme van den graad n en de klasse k aan te raken. Deze voorwaarde wordt voorgesteld door $k\mu + n\nu$, zonder dat een dergelijke voorstelling voor andere voorwaarden mogelijk is. Is nu b.v. aan een kromme van den graad m de voorwaarde opgelegd aan $\omega = \frac{1}{2} m (m+3)$ gegeven krommen te moeten raken, dan wordt dit aantal voorgesteld door

$$(k_1\mu + n_1\nu)(k_2\mu + n_2\nu) \ldots (k_\omega\mu + n_\omega\nu),$$

waarbij na de vermenigvuldiging de $\omega + 1$ aantallen $\mu^j \nu^{\omega - j}$, d. w. z. de *elementairgetallen,* door hun waarden moeten worden vervangen. De vraag is dan tot een eenvoudigere teruggebracht, n.l. het zoeken der elementairgetallen.

Het zal nu voordeelig zijn om voor de voorwaarden $a_1, \ldots, a_i$ zooveel mogelijk *degeneratievoorwaarden* te kiezen, d. z. *invariante*

voorwaarden, die niet een betrekking ten opzichte van andere figuren inhouden, maar waarbij we eenvoudig aan de definitie der figuur een nieuwe definieerende voorwaarde toevoegen, waardoor het aantal parameters der figuur beperkt wordt. Het onderzoek moet nu zoo geleid worden, dat, alvorens men de bepaling van aantallen eener figuur Γ ter hand neemt, de overeenkomstige vragen voor alle figuren, die door degeneratie van Γ ontstaan en dus noodzakelijk eenvoudiger dan Γ zijn, reeds zijn opgelost, zoodat men met de eenvoudigste figuren beginnend telkens tot ingewikkelder figuren voortschrijdt. In dat geval kunnen dus steeds alle aantallen figuren, die behalve aan de beschouwde voorwaarden nog aan een degeneratievoorwaarde voldoen, als bekend ondersteld worden. Een reeds bij de kegelsnedensystemen besproken moeilijkheid, die zich hierbij echter voordoet, bestaat daarin, dat de figuren, die in het door de degeneratievoorwaarde d beperkte systeem nog aan een voorwaarde x voldoen, meerdere malen geteld moeten worden in het aantal der figuren van het oorspronkelijke systeem, die aan de voorwaarde dx voldoen Deze getallenfactoren kunnen volgens de ZEUTHEN'sche methode der onbepaalde coëfficienten bepaald worden, waaruit dan weer algemeene regels omtrent de multipliciteit der degeneraties kunnen worden afgeleid, waarvan SCHUBERT in zijn *Kalkül* (p. 102) er voor krommen in de ruimte en oppervlakken een achttal opsomt.

Het bepalen van aantallen zal dus steeds neerkomen op het terugbrengen tot degeneratie-aantallen; aan de manier waarop dit in verschillende gevallen gebeuren kan wijdt SCHUBERT bijna de helft van zijn *Kalkül* (Vierter Abschnitt. Die Berechnung von Anzahlen durch Ausartungen, p. 89—227).

Op deze wijze slaagt SCHUBERT er in zeer vele aantallen te bepalen, die betrekking hebben op vlakke kubische krommen met keerpunt (§ 23) [1]), vlakke kubische krommen met dubbelpunt

---

[1]) **92** en **93** *Gött. Nachr.* 1874 en 1875, **94** *Math. Ann. Bd.* 13, p. 451—509.

(§ 24)[1]), kubische ruimtekrommen (§ 25)[2]) en krommen van den 4den graad in een vast vlak (§ 26).

Bij deze onderzoekingen komt het er dus in de eerste plaats op aan alle mogelijke degeneraties der beschouwde figuur op te zoeken. Dit kan echter niet met behulp van de meetkunde van het aantal gebeuren, maar daartoe moeten andere beschouwingen dienen, b.v. analytisch-meetkundige. Een zeer vruchtbare methode tot het opsporen van degeneraties is de veelvuldig door SCHUBERT toegepaste methode der *homographische afbeelding*, waarop ZEUTHEN hem opmerkzaam gemaakt heeft[3]). Nemen we n.l. in het vlak eener kromme een punt S als *centrum*, een lijn r als *as* en een getal λ als *dubbelverhouding der homographie* aan, dan vindt men van een punt A het *homographische beeld* A' door op de rechte SA, die r in R snijdt, een punt A' zoo te construeeren, dat $(S, R, A, A') = \lambda$ is. Door nu $\lambda = 0$ te nemen, het centrum S alle mogelijke bijzondere standen ten opzichte van de af te beelden figuur te geven en bovendien de zoo verkregen degeneraties dualistisch om te vormen worden alle mogelijke degeneraties verkregen (een zeker soort HALPHEN'sche degeneraties echter uitgezonderd). Op deze wijze vindt SCHUBERT bij een kwadratisch oppervlak *drie* degeneratievormen (*Kalkül* § 16 en 22), bij een vlakke kubische kromme van de derde en van de vierde klasse ieder *dertien* degeneraties (l. c. § 23 en 24), waarvan er reeds eenige door MAILLARD[4])

[1]) **94** *Math. Ann. Bd.* 13, p. 509—539.

[2]) In het in 1875 bekroond antwoord der in 1873 door de Kon. Deensche Akad. van Wetenschappen uitgeschreven door ZEUTHEN gestelde prijsvraag: Uitbreiding der karakteristiekentheorie tot de systemen van die geometrische figuur, die uit de punten en osculatievlakken eener kubische ruimtekromme bestaat, en bepaling der karakteristieken der elementairsystemen. (Zie **65** *Math. Ann. Bd.* 10, p. 4.)

[3]) Zie SCHUBERT's *Kalkül der abz. Geom.* (**67**), p. 338, Lit. 24.

[4]) **85** Dissertatie, waarvan eenige resultaten zijn afgedrukt in **86** *Bull. des sciences Math.* (1) *t.* 3.

en ZEUTHEN [1]) gevonden waren, en bij een kubische ruimtekromme *elf* degeneratievormen (**95** *Math. Ann. Bd.* 15, **67** *Kalkül* § 25).

Als voorbeeld bespreken we iets uitvoeriger de bepaling van aantallen, die betrekking hebben op een C_3 met keerpunt. Eenvoudigheidshalve nemen we het vlak der kromme niet zooals SCHUBERT doet als beweeglijk maar als vast aan. De kromme bevat dan $\omega = 7$ parameters. De *elementairvoorwaarden* zijn als steeds:
$\mu =$ de voorwaarde door een gegeven punt te gaan,
$\nu =$ de voorwaarde een gegeven rechte aan te raken.

De andere voorwaarden, die SCHUBERT beschouwt, hebben betrekking op bijzondere uit de kromme af te leiden punten en lijnen. Deze zijn:

$c =$ het keerpunt,
$v =$ het buigpunt,
$y =$ het snijpunt van buig- en keerraaklijn,
$w =$ de buigraaklijn,
$q =$ de keerraaklijn,
$z =$ de verbindingslijn van keer- en buigpunt.

Dezelfde letters gebruiken we bij c, v en y voor de voorwaarde op een gegeven rechte te liggen en bij w, q en z voor de voorwaarde door een gegeven punt te gaan. Hierbij beteekent dus b.v. c^2 de voorwaarde, dat het keerpunt gegeven is, terwijl de voorwaarde c^3 natuurlijk geen zin heeft, evenmin als $v^3, \ldots, z^3$.

De vraag is nu:

Alle aantallen kubische krommen met keerpunt te bepalen, die aan een 7-voudige uit μ, ν, c, v, y, w, q, z samengestelde voorwaarde voldoen.

Onder de mogelijke degeneraties is er één (die SCHUBERT de degeneratie σ noemt), die een bijzondere plaats inneemt, doordat ze de eenige degeneratie is, die voorkomen kan in een systeem, dat door een zes-voudige uit μ en ν samengestelde voorwaarde

---

[1]) **87** *Comptes Rendus t.* 74; zie ook **90**.

gedefinieerd is. Deze degeneratie bestaat uit een kegelsnede en een er aan rakende rechte, waarbij het raakpunt een klassepunt is. Alle overige degeneraties bestaan uitsluitend uit enkel- of meer-voudige graad-rechten en klasse-punten.

Door toepassing van zijn *coincidentieformules* (*Kalkül* § 13, 15 en 17) leidt SCHUBERT tusschen de voorwaarden $\mu, \nu, c, \ldots, z$ een 25-tal vergelijkingen [1]) af, waarin de degeneratievoorwaarde σ en nog onbekende homogene lineaire functies der 12 overige degeneratievoorwaarden voorkomen. Deze vergelijkingen blijken echter van elkaar afhankelijk te zijn en gelijk te staan met 7 vergelijkingen, waaruit σ, c, w, v, q, y en z kunnen worden opgelost uitgedrukt in μ en ν en nog onbekende lineaire functies der overige degeneratievoorwaarden. Deze vergelijkingen zijn:

de σ-formule $\quad 2\sigma = \mu + \nu - \alpha_\sigma$,

de c-formule $\quad 3c = 4\mu - \nu - \alpha_c$,

de w-formule $\quad 3w = 4\nu - \mu - \alpha_w$,

de v-formule $\quad 6v = 7\nu - \mu - \alpha_v$,

de q-formule $\quad 6q = 7\mu - \nu - \alpha_q$,

de y-formule $\quad 3y = 2\nu + \mu - \alpha_y$,

de z-formule $\quad 3z = 2\mu + \nu - \alpha_z$,

---

[1]) Dit zijn de vergelijkingen (1), . . . , (25) (*Kalkül* p. 110). Daar SCHUBERT echter het vlak der kromme beweeglijk denkt in een drie-dimensionale ruimte, onderscheidt hij *drie* elementairvoorwaarden, n.l.:

μ = de voorwaarde, dat het vlak der kromme door een gegeven punt gaat,

ν = de voorwaarde, dat de kromme een gegeven rechte snijdt,

ρ = de voorwaarde, dat de kromme een gegeven plat vlak aanraakt.

Wil men de formules van SCHUBERT toepassen op het geval, dat het vlak der kromme vast ligt, dan moet men al zijn formules met μ^3 vermenigvuldigen, waarbij men alle termen, die μ^4 bevatten, weg te laten, $\mu^3\nu$ door ons symbool μ en $\mu^3\rho$ door ons symbool ν te vervangen heeft. Daar, waar μ^3 met andere voorwaarden vermenigvuldigd voorkomt, kan het sym-

waarin α_σ enz. de nog te bepalen functies der overige degeneratievoorwaarden zijn. Om die functies te bepalen schrijft men in de oorspronkelijke 25 vergelijkingen de lineaire functies met 25×12 nog onbekende coëfficienten neer. Van een groot aantal dier coëfficienten blijkt uit de beschrijving der degeneraties dat ze nul zijn, terwijl andere langs algebraïschen weg gevonden worden. De overige worden dan bepaald uit de omstandigheid, dat die 25 vergelijkingen slechts met 7 vergelijkingen aequivalent zijn. Op deze wijze bepaalt SCHUBERT de lineaire functies der degeneratievoorwaarden, die in de oorspronkelijke 25 vergelijkingen, en dus ook die, welke in de daaruit afgeleide 7 *„hoofdformules"* voorkomen.

Vervolgens worden alle aantallen krommen bepaald, die aan een der dertien degeneratievoorwaarden en bovendien aan een zes-voudige uit $\mu, \nu, c, \ldots, z$ samengestelde voorwaarde voldoen. Zijn eenmaal al deze degeneratiesymbolen berekend, dan kunnen de overige aantallen als volgt gevonden worden. We vermenigvuldigen de 7 hoofdformules met alle mogelijke uit μ, ν, c, w, v, q, y, z samengestelde zes-voudige symbolen, waarvan (daar $c, w, \ldots, z$ slechts tot de 2de machten kunnen voorkomen [1]) men het aantal gemakkelijk op 547 berekent. Men krijgt zoo $7 \times 547 = 3829$ vergelijkingen, waarin men alle degeneratiesymbolen door hun reeds gevonden waarden vervangt. In die vergelijkingen komen dan nog de zeven-voudige uit $\mu, \nu, c, \ldots, z$ samengestelde symbolen voor, waarvan het aantal 704 bedraagt. Deze

---

bool μ^3 onderdrukt worden, daar de voorwaarde μ^3 reeds in de definitie der door ons beschouwde figuur ligt opgesloten. Dit komt dus daar op neer, dat men, om de formules van SCHUBERT op krommen in een vast vlak te kunnen toepassen, in zijn formules $\mu = 0$ te stellen, ν door μ en ρ door ν te vervangen heeft.

[1]) Waarbij men verder nog te bedenken heeft, dat b.v. c^2 en q^2 onvereenigbaar zijn, dat $c^2q = cq^2$ is, enz.

kunnen dus met veel controle uit de verkregen vergelijkingen worden opgelost [1]).

Op deze wijze heeft SCHUBERT alle aantallen kubische krommen met keerpunt bepaald, die aan geen andere dan de besproken voorwaarden voldoen. Zoo vindt men b.v. op p. 140 van zijn *Kalkül* opgegeven $cw\mu^3\nu^2 = 166$, hetgeen dus zeggen wil, *dat er* 166 *kubische krommen zijn, die op een gegeven rechte een keerpunt hebben, hun buigraaklijn door een gegeven punt zenden, door drie gegeven punten gaan en aan twee gegeven rechten raken.*

---

§ 14. ZEUTHEN's *onderzoekingen omtrent krommensystemen van den vierden en hoogeren graad.*

Voor vlakke krommen van den 4den graad zijn de onderzoekingen minder volledig. Daarvan zijn door ZEUTHEN (90 *Verslagen der Deensche Akad.* (5) *Bd.* 10) alle degeneraties beschreven, die

---

[1]) Het is duidelijk, dat het bij de uitvoering der berekening niet noodig is tegelijkertijd 3829 vergelijkingen met 704 onbekenden neer te schrijven, maar dat die getallen slechts genoemd zijn om de mogelijkheid der berekening aan te toonen. Bij de uitvoering daarvan kan men beginnen met de σ- en de c-formule met ieder der 7 symbolen $\mu^i\nu^{6-i}$ en de σ-formule bovendien met ieder der 6 symbolen $c\mu^i\nu^{5-i}$ te vermenigvuldigen. Men krijgt dan 20 vergelijkingen, waaruit de 8 symbolen $\mu^i\nu^{7-i}$ en de 7 symbolen $c\mu^i\nu^{6-i}$ kunnen worden opgelost. Door vervolgens de w-, v-, q-, y- en z-formule met ieder der 7 symbolen $\mu^i\nu^{6-i}$ te vermenigvuldigen en in het tweede lid voor de gevonden symbolen hun waarden te substitueeren, vindt men alle symbolen, die een zes-voudige elementairvoorwaarde bevatten. Door nu telkens de vergelijkingen met de reeds gevonden symbolen met weglating van een factor μ of ν te vermenigvuldigen vindt men steeds nieuwe symbolen.

in elementairsystemen kunnen voorkomen, en daaruit eenige honderden aantallen berekend. Eenige van zijn resultaten heeft hij medegedeeld in 88 *Comptes Rendus t.* 75. ZEUTHEN gaat bij zijn onderzoekingen (die zich tot krommen in een vast vlak beperken) uit van enkelvoudig-oneindige systemen van krommen van willekeurigen graad. Daarbij onderstelt hij, dat een willekeurige kromme van het systeem geen hoogere dan de vier PLÜCKER'sche singulariteiten bezit, en wel in voorgeschreven aantal, en dat het systeem behalve door de PLÜCKER'sche getallen nog gedefinieerd is door de voorwaarde door eenige gegeven punten te gaan en aan eenige gegeven rechten te raken in zoo groot aantal, dat de krommen van het systeem nog van één parameter afhangen; dergelijke systemen noemt CHASLES *elementair*. ZEUTHEN voert verder de volgende met het systeem samenhangende getallen in [1]:

$\mu =$ aantal krommen, die door een gegeven punt gaan,
$b =$ graad der meetkundige plaats der dubbelpunten,
$c =$ graad der meetkundige plaats der keerpunten,
$p =$ klasse der omhullende der dubbelpuntsraaklijnen,
$q =$ klasse der omhullende der keerraaklijnen,
$u =$ klasse der omhullende der van uit de dubbelpunten getrokken raaklijnen,
$v =$ klasse der omhullende der van uit de keerpunten getrokken raaklijnen,
$x =$ klasse der omhullende der verbindingslijnen van twee dubbelpunten,
$y =$ klasse der omhullende der verbindingslijnen van een dubbelpunt en een keerpunt,
$z =$ klasse der omhullende der verbindingslijnen van twee keerpunten,

[1]) Ik heb hierbij de notaties van ZEUTHEN overgenomen, die niet met de vroeger gebruikte overeenstemmen. Bij ZEUTHEN is n de graad der krommen, die d dubbelpunten en e keerpunten hebben, terwijl n', d', e' de reciproke beteekenis hebben.

en de hiermede reciproke getallen, die door geaccentueerde letters worden aangewezen.

Ieder dier letters kan men tevens volgens de door SCHUBERT ingevoerde opvatting (zie § 5) als een aan de krommen van het systeem opgelegde voorwaarde beschouwen. Zoo stelt dus b.v. b de voorwaarde voor, dat een der dubbelpunten der kromme op een gegeven rechte ligt, q de voorwaarde dat een keerraaklijn door een gegeven punt gaat, enz. ZEUTHEN, die zijn verhandeling schreef voordat deze symbolische rekenwijze zich gevormd had [1]), kent aan zijn letters die beteekenis niet toe, maar in den grond der zaak komen natuurlijk ZEUTHEN's vergelijkingen tusschen aantallen op hetzelfde neer als SCHUBERT's vergelijkingen tusschen voorwaarden.

In het systeem komen zoogenaamde *singuliere krommen* voor, d.w.z. krommen, die andere singuliere punten en raaklijnen hebben, dan een willekeurige kromme van het systeem. ZEUTHEN noemt de singuliere krommen, die in elementairsystemen voorkomen, *gewoon singulier*. Deze worden weer in twee soorten onderscheiden, n.l. in die welke niet en die welke wel meermalen tellende takken bevatten. Ondersteld wordt, dat er geen andere singuliere krommen van de laatste soort in het elementairsysteem voorkomen dan de krommen α en α' [2]) van onderstaande tabel, die de aantallen singuliere krommen opgeeft, die het systeem bevat:

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 =$ aantal krommen met een nieuw dubbelpunt,

α_0 waarvan geen der takken door het dubbelpunt recht is,

α_1 waarvan één der takken door het dubbelpunt recht is,

α_2 waarvan beide takken door het dubbelpunt recht zijn,

---

[1]) Zijn verhandeling dateert n.l. van 1873.

[2]) Een kromme α heeft alleen als meetkundige plaats van raaklijnen, α' alleen als meetkundige plaats van punten een meervoudigen tak.

β = aantal krommen, waarvan een dubbelpunt in een keerpunt ontaard is,

$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ = aantal krommen, waarvan een keerpunt in een dubbelpunt met twee elkaar rakende takken ontaard is,

γ_0 waarvan geen dier takken recht is,

γ_1 waarvan één dier takken recht is,

$(2d)$ = aantal krommen, waarvan twee dubbelpunten zijn samengevallen,

(de) = aantal krommen, waarvan een dubbelpunt met een keerpunt is samengevallen (waardoor een snavelpunt ontstaat),

$(2e)$ = aantal krommen, waarvan twee keerpunten zijn samengevallen,

$(3d)$ = aantal krommen, waarvan drie dubbelpunten zijn samengevallen,

$(2de)$ = aantal krommen, waarvan twee dubbelpunten met een keerpunt zijn samengevallen,

$(d2e)$ = aantal krommen, waarvan twee keerpunten met een dubbelpunt zijn samengevallen,

terwijl weer de reciproke aantallen door geaccentueerde letters worden aangegeven. Ondersteld wordt, dat die singuliere krommen geen andere singuliere punten (of raaklijnen voor de geaccentueerde letters) vertoonen dan in hun definitie is uitgedrukt, en dat in het systeem geen andere singuliere krommen dan de opgesomde voorkomen. Bij al die singuliere krommen maakt ZEUTHEN door figuren duidelijk hoe ze door limietovergangen uit de algemeene krommen ontstaan. Verder wordt nog aangetoond, dat sommige symbolen identiek zijn met de reciproke symbolen, n.l.:

$$(2d) = (2d') \ , \ (de) = (d'e') \ , \ (2e) = (2e') \ , \ \gamma_1 = \gamma'_1 \ .$$

Het is duidelijk, dat men ook de verschillende aantallen singuliere krommen als symbolen voor degeneratievoorwaarden kan opvatten; zoo is b.v. β de voorwaarde, dat een dubbelpunt in een

keerpunt ontaardt, enz. In het geheel komen dus de volgende 40 voorwaarden (of aantallen) in beschouwing:

$$\mu, \mu', b, b', c, c', p, p', q, q', u, u', v, v', x, x', y, y', z, z', \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha'_0, \alpha'_1,$$
$$\alpha'_2, \beta, \beta', \gamma_0, \gamma_1, \gamma'_0, (2d), (de), (2e), (3d), (3d'), (2de), (2d'e'), (d2e), (d'2e').$$

Door rechtstreeksche toepassing van het CHASLES'sche correspondentiebeginsel [1]) (zie § 17) leidt ZEUTHEN tusschen die 40 aantallen een 24-tal vergelijkingen (**90** p. 328 en 329) af, waarvan er echter slechts 23 van elkaar onafhankelijk blijken. *Men kan dus* 23 *dier voorwaarden lineair in de* 17 *overige uitdrukken* [2]).

Met behulp van deze formules bepaalt ZEUTHEN (l. c. § 33, p. 338—339) de volgende *vijf* aantallen:

Het aantal krommen van het systeem, die een gegeven rechte zoo snijden, dat door een der snijpunten nog een der volgende vijf rechten gaat: een dubbelpuntsraaklijn, een keerpuntsraaklijn, een verbindingslijn van twee dubbelpunten, van twee keerpunten of van een dubbelpunt en een keerpunt.

In het bijzonder onderzoekt ZEUTHEN de elementairsystemen van krommen van den 3den en den 4den graad, waarbij dan echter de beperking, dat in de systemen slechts de opgesomde singuliere krommen voorkomen, wordt weggelaten. De singuliere krommen, die in elementairsystemen van den 3den en den 4den graad kunnen voorkomen, worden nu *alle* opgezocht en beschreven,

---

[1]) Dit is dus in den aard der zaak dezelfde handelwijze als die van SCHUBERT (*Kalkül* § 23, 24 en 25), die zijn uit het correspondentiebeginsel afgeleide coincidentieformules toepast om betrekkingen tusschen voorwaarden af te leiden, hetgeen het voordeel heeft een herhaalde toepassing van dit beginsel overbodig te maken. Dit beginsel is n.l. eens en vooral bij de afleiding der coincidentieformules toegepast.

[2]) De 23 formules van ZEUTHEN zijn door SCHUBERT (**94** *Math. Ann. Bd.* 13, p. 443—446) uitgebreid tot systemen van vlakke krommen in de ruimte. Zie ook KREY (**132**) *Acta Math. Bd.* 7, p. 85.

hetgeen weer door figuren wordt toegelicht; hieronder zijn er nu ook met meermalen tellende takken (b.v. een dubbeltellende kegelsnede). Verschillende van deze degeneratievormen worden uitgebreid tot krommen van den n^{den} graad.

Bewezen wordt nu, dat bij elementairsystemen van kubische krommen met een singulier punt (dubbel- of keerpunt) en van krommen van den 4^{den} graad met drie singuliere punten geen nieuwe degeneraties optreden, zoodat daarvoor de 23 formules onveranderd doorgaan.

Als voorbeeld beschouwen we een elementairsysteem van kubische krommen met keerpunt ($n = n' = 3$, $d = d' = 0$, $e = e' = 1$). De eenige daarin voorkomende degeneraties zijn die in een kegelsnede en een daaraan rakende rechte, dus een degeneratie γ_1 [1]). De eenige der 40 symbolen, die dan niet nul zijn, zijn zooals onmiddellijk uit hun beteekenis is in te zien $\mu, \mu', c, c', q, q', \gamma_1$. De 23 formules van ZEUTHEN reduceeren zich dan na herleiding tot:

$$\left.\begin{array}{c} 2\gamma_1 = \mu + \mu' \ , \\ 3c = 4\mu - \mu' \ , \ 3c' = 4\mu' - \mu \ , \\ 6q = 7\mu - \mu' \ , \ 6q' = 7\mu' - \mu \ . \end{array}\right\}^{2)} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

In de verschillende elementairsystemen, die we naar de elementairvoorwaarden, waaraan ze voldoen, als systemen $\mu^6, \mu^5\mu', \ldots, \mu'^5$ van elkaar onderscheiden, kunnen de aantallen degeneraties γ_1 gemakkelijk bepaald worden. Bij een systeem μ^6 b.v. zijn deze:

1ste. De kegelsneden door 5 der 6 gegeven punten gecombineerd met een der beide raaklijnen uit het 6de punt aan de kegelsnede getrokken. Dit geeft $6 \,.\, 2 = 12$ degeneraties.

2de. De verbindingslijn van 2 der 6 gegeven punten gecombineerd met een der beide kegelsneden door de 4 overige punten,

---

[1]) Dit is de degeneratie σ van SCHUBERT.

[2]) Vergelijk de formules van SCHUBERT (p. 86).

die aan deze verbindingslijn raken. Dit geeft $\frac{6.5}{1.2}.2 = 30$ degeneraties.

Voor het systeem μ^6 is dus $\gamma_1 = 12 + 30 = 42$ en daar een kubische kromme met keerpunt met zich zelf reciprook is vindt men dezelfde uitkomst voor een systeem μ'^6. Op deze wijze vindt men:

Voor een systeem μ^6 of μ'^6 is $\gamma_1 = 42$,
voor een systeem $\mu^5\mu'$ of $\mu\mu'^5$ is $\gamma_1 = 87$,
voor een systeem $\mu^4\mu'^2$ of $\mu^2\mu'^4$ is $\gamma_1 = 141$,
voor een systeem $\mu^3\mu'^3$ is $\gamma_1 = 168$.

Voor het met zich zelf reciproke systeem $\mu^3\mu'^3$ is $\mu = \mu'$, dus volgens de vergelijkingen (35):

$$\mu^4\mu'^3 = \mu^3\mu'^4 = \mu^3\mu'^3c = \mu^3\mu'^3c' = \mu^3\mu'^3q = \mu^3\mu'^3q' = 168.$$

Hierbij zijn de definieerende elementairvoorwaarden in het symbool opgenomen.

Nu is echter $\mu^4\mu'^3$ even goed te beschouwen als het getal μ' voor het systeem $\mu^4\mu'^2$, waaruit men dan verder met behulp van (35) μ, c, c', q en q' bepaalt. Men vindt zoo:

$$\mu^5\mu'^2 = \mu^2\mu'^5 = 114\,,\ \mu^4\mu'^2c = \mu^2\mu'^4c' = 96\,,\ \mu^4\mu'^2q = \mu^2\mu'^4q' = 105\,,$$
$$\mu^4\mu'^2c' = \mu^2\mu'^4c = 186\,,\ \mu^4\mu'^2q' = \mu^2\mu'^4q = 177\,.$$

Hierin is weer $\mu^5\mu'^2$ te beschouwen als het getal μ' voor het systeem $\mu^5\mu'$, waardoor men vindt:

$$\mu^6\mu' = \mu\mu'^6 = 60\,,\ \mu^5\mu'c = \mu\mu'^5c' = 42\,,\ \mu^5\mu'q = \mu\mu'^5q' = 51,$$
$$\mu^5\mu'c' = \mu\mu'^5c = 132\,,\ \mu^5\mu'q' = \mu\mu'^5q = 123\,.$$

En hier volgt weer uit:

$$\mu^7 = \mu'^7 = 24\ ,\ \mu^6c = \mu'^6c' = 12\ ,\ \mu^6q = \mu'^6q' = 18\,,$$
$$\mu^6c' = \mu'^6c = 72\ ,\ \mu^6q' = \mu'^6q = 66\,.$$

Deze aantallen zijn in overeenstemming met die van SCHUBERT, die echter door beschouwing van *alle* degeneraties nog veel meer

aantallen bepaald heeft. Bij de ZEUTHEN'sche vergelijkingen (35) moet men n.l. bedenken, dat die alleen gelden toegepast op elementairsystemen, of (wat op hetzelfde neerkomt) na symbolische vermenigvuldiging met een uit μ en μ' samengestelde zesvoudige voorwaarde. Men mag die vergelijkingen b.v. niet symbolisch met c vermenigvuldigen. Zoo zou men b.v. vinden:

$$3\mu^2\mu'c^2 = 4\mu^5\mu'c - \mu^4\mu'^2c = 4 \,.\, 42 - 96 = 72\,,$$
$$\mu^4\mu'c^2 = 24\,,$$

terwijl SCHUBERT (*Kalkül* p. 140) hiervoor 8 opgeeft. Dit komt natuurlijk daardoor, dat onder het aantal 24 eenige niet in elementairsystemen voorkomende degeneraties [1]) zijn medegeteld.

Voor elementairsystemen van kubische krommen zonder singulier punt of van bikwadratische krommen met minder dan drie singuliere punten maken de degeneraties met meervoudige takken, dat de 23 formules niet onveranderd doorgaan. Voor de verschillende soorten van systemen worden nu de supplementaire termen opgegeven, die de vergelijkingen juist doen blijven. Met behulp der zoo verkregen vergelijkingen bepaalt ZEUTHEN voor ieder dier elementairsystemen de verschillende karakteristieke getallen. Een aantal daarvan, o.a. de elementairgetallen van eenige systemen van bikwadratische krommen, vindt men opgegeven in SCHUBERT's *Kalkül* (§ 26, p. 184—187). Verder zij nog vermeld dat een uitvoerige bespreking der ZEUTHEN'sche onderzoekingen voorkomt in CLEBSCH—LINDEMANN *Bd.* 1, p. 407—424, waar men ook de besproken 23 vergelijkingen van ZEUTHEN met hun afleidingen vinden zal. Ook is nog een kort verslag van ZEUTHEN zelf te vinden in **91** *Bull. des sciences math.* (1) *t.* 7.

---

[1]) Deze ten onrechte medegetelde degeneraties zijn wat SCHUBERT (**94** *Math. Annalen Bd.* 13, p. 438) „*Ausartungen erster Gattung*" noemt.

§ 15. *Onderzoekingen van* CHASLES, FOURET, HALPHEN *e. a. omtrent aantallen algebraïsche en transcendente krommen.*

Omtrent aantallen krommen van den m^{den} graad zijn de onderzoekingen uit den aard der zaak nog veel minder volledig dan bij krommen van den 4^{den} graad. Wel geeft SALTEL (**130** *Bull. de la Soc. Math. t.* 2) een op birationale transformaties berustende methode aan, waarmede aantallen krommen van hoogeren graad kunnen worden teruggebracht tot overeenkomstige problemen bij krommen van lageren graad, gebruik makend van een beginsel, dat hij *„le principe arguesien unicursal"* (**129**) noemt. Voor de toepassing daarvan is echter noodig, dat onder de $\frac{1}{2}m(m+3)$ gegevens, waaraan de kromme van den m^{den} graad te voldoen heeft, voorkomt het gegeven zijn van drie meervoudige punten met een gezamenlijke multipliciteit $> m$. Als voorbeeld noemt SALTEL de vraag naar *het aantal bikwadratische krommen met drie gegeven dubbelpunten, die door p gegeven punten gaan en d gegeven rechten aanraken* ($p+d=5$). Door een kwadratische transformatie met de drie gegeven dubbelpunten als fundamentaalpunten gaan de bikwadratische krommen in kegelsneden, de p gegeven punten in p andere gegeven punten en de d gegeven rechten in d gegeven door de dubbelpunten gaande kegelsneden over. De vraag is dus teruggebracht tot de volgende: *Hoeveel kegelsneden zijn er, die door p gegeven punten gaan en d gegeven kegelsneden aanraken?* Dit is een vraag, die met behulp van de karakteristiekentheorie der kegelsnede is beantwoord.

De verwachting, die SALTEL (**130** Remarque IV) van zijn beginsel koesterde, dat n.l. met behulp daarvan ook aantallen krommen van hoogeren graad zonder meervoudige punten gevonden zouden kunnen worden [1]), deel ik niet; er zijn mij dan ook geen der-

[1]) SALTEL beroept zich hierbij op uitspraken van CHASLES (**135** en **136** *Comptes Rendus t.* 62, p. 581 en 1364), dat men uit de eigenschappen van krommen, die het maximale aantal dubbelpunten hebben, kan komen

gelijke toepassingen van dat beginsel bekend, evenmin als daaruit afgeleide op krommen van den m^{den} graad betrekking hebbende resultaten.

Enkelvoudig-oneindige systemen van vlakke krommen van willekeurigen graad zijn het eerst door CHASLES en DE JONQUIÈRES beschouwd. CHASLES verstaat hierbij onder de *karakteristieken* van dat systeem het aantal μ der door een gegeven punt gaande krommen en het aantal ν der aan een gegeven rechte rakende krommen. Het systeem wordt dan een (μ, ν)-systeem genoemd. Hieromtrent heeft CHASLES de volgende stelling uitgesproken:

Het aantal krommen van een systeem (μ, ν), die een gegeven kromme van den graad n en de klasse k aanraken, bedraagt

$$k\mu + n\nu \text{ [1]}.$$

Deze stelling is door ZEUTHEN [2]) (**105** *Math. Ann. Bd.* 3) bewezen. Een zeer eenvoudig maar m. i. niet geheel afdoend bewijs geeft

---

tot eigenschappen van krommen zonder dubbelpunten, als men slechts den invloed dier laatste weet te bepalen. CHASLES doelt hierbij m.i. echter op het geval, dat een *gegeven* kromme van dubbelpunten voorzien is (b.v. de kromme, waaraan een aanraking is voorgeschreven), terwijl in het bovengenoemde voorbeeld daarentegen die dubbelpunten aan de gevraagde kromme zijn voorgeschreven.

[1]) CHASLES (**15** *Comptes Rendus t.* 58, p. 300) bewijst deze stelling voor een kegelsnedensysteem en spreekt in een noot zonder bewijs de juistheid van deze en eenige andere stellingen voor een krommensysteem van hoogeren graad uit. Hij beperkt zich hierbij tot het geval, dat de gegeven kromme punt-algemeen dus $k = n(n-1)$ is, een beperking, die hij later voor een kegelsnedensysteem (**17** *Comptes Rendus t.* 59, p. 211) heeft laten varen.

Voor het bewijs zie SALMON—FIEDLER. *Höh. Kurven* (**32**), art. 391, waarbij eveneens de kromme punt-algemeen ondersteld wordt, en CLEBSCH—LINDEMANN. *Bd.* 1 (**31**), p. 424.

[2]) Ook ZEUTHEN onderstelt de gegeven kromme punt-algemeen, maar zijn bewijs is gemakkelijk tot een willekeurige kromme uit te breiden.

SCHUBERT (**67** *Kalkül* p. 14) als voorbeeld ter toepassing van zijn beginsel van het behoud van het aantal of der bijzondere ligging (**65** *Math. Ann. Bd.* 10, p. 23). Hij laat n.l. de gegeven kromme als meetkundige plaats van punten degenereeren in n samenvallende rechten l en als meetkundige plaats van raaklijnen in k verschillende stralenbundels met op l gelegen dragers, of volgens zijn terminologie (*Kalkül* p. 101 [1]) in een *n-voudige graadrechte, waarop k enkelvoudige klasse-punten* [2]) *liggen.* Aan de voorwaarde voldoen nu de ν krommen, die aan de graad-rechte raken, ieder n maal geteld, en de krommen, die door een der klasse-punten gaan, waarvan ieder klasse-punt er μ oplevert.

Later spreekt CHASLES de meening uit, dat de bovengenoemde stelling evenals bij de kegelsneden (zie § 5) tot een willekeurige enkelvoudige voorwaarde is uit te breiden [3]). In dat geval zou men van het systeem niets anders dan de beide getallen μ en ν

---

[1]) Zie ook CLEBSCH—LINDEMANN. *Bd.* 1, p. 392.

[2]) „*Sommet*" volgens CHASLES en ZEUTHEN.

[3]) „En outre, le procédé général de démonstration, dans les coniques, qui repose sur le principe de correspondance entre deux séries de points ou de droites, s'applique aussi à la démonstration des propriétés des systèmes de courbes d'ordre supérieur, *et ses propriétés s'expriment en fonction des deux caractéristiques, comme dans la théorie des coniques*" (**126** *Comptes Rendus t.* 62, p. 325 ; de cursiveering is van mij).

Deze onjuiste bewering is overgenomen in SALMON—FIEDLER. *Höh. Kurven* (**32**). Daar leest men n.l. op p. 474 (art. 392) :

„Im algemeinen wird die Zahl der Kurven des Systems, welche irgend einer andern Bedingung genügen, von der Form $\mu\alpha + \nu\beta$ sein und die Zahlen α, β können als *Characteristiken dieser Bedingung* angesehen werden. Wenn eine Kurve durch eine hinreichende Anzahl von Bedingungen bestimmt ist und diese Characteristiken für jede Bedingung bekannt sind, so kann die Zahl der Kurven bestimmt werden, die den vorgezeichneten Bedingungen genügen. Wir erörtern dies an dem Falle der Kegelschnitte". De hierop volgende toepassing is natuurlijk correct.

te kennen hebben, m. a. w. het enkelvoudige karakteristiekengetal zou *twee* zijn. Dat dit niet zoo is wordt reeds daardoor begrijpelijk, dat het aantal karakteristieken (zoo die al bestaan) grooter wordt naarmate de figuren ingewikkelder worden (d. w. z. van een grooter aantal parameters afhangen). CLEBSCH (27 *Math. Ann. Bd.* 6), die de CHASLES'sche stelling $\alpha\mu + \beta\nu$ (zie § 5) voor kegelsneden bewees (behoudens de HALPHEN'sche modificatie), zag daarin een algemeene eigenschap der kwadratische vormen, die wel is uit te breiden tot een willekeurig aantal veranderlijken (waarbij dan het aantal karakteristieken aan dat der veranderlijken gelijk wordt), maar niet tot vormen van hoogeren graad. Ook het bewijs, dat LINDEMANN (CLEBSCH—L. *Bd.* 1, p. 424) van de stelling $\alpha\mu + \beta\nu$ geeft, doet duidelijk zien waarom die stelling wel voor een aanrakingsvoorwaarde maar niet voor een willekeurige voorwaarde geldt. Eindelijk wijst SCHUBERT (*Kalkül* p. 288) er op, dat reeds bij een kubische kromme met keerpunt de beide voorwaarden μ en ν niet voldoende zijn om alle andere in uit te drukken (echter zonder dit nader uit te werken). Was dit n.l. wel zoo en dus het karakteristiekengetal *twee*, dan zou uit vergelijking (7) (p. 56) volgen:

$$\begin{vmatrix} c^2\mu^4\nu & c\mu^5\nu & c\mu^4\nu^2 \\ c\,\mu^5\nu & \mu^6\nu & \mu^5\nu^2 \\ c\,\mu^4\nu^2 & \mu^5\nu^2 & \mu^4\nu^3 \end{vmatrix} = 0\ ^{1)},$$

of volgens de door SCHUBERT (*Kalkül* p. 140) gegeven tabel:

$$\begin{vmatrix} 8 & 42 & 96 \\ 42 & 60 & 114 \\ 96 & 114 & 168 \end{vmatrix} = 0,$$

hetgeen onjuist is [2]).

[1]) Hierin is c de voorwaarde, dat het keerpunt op een gegeven rechte ligt. Zie § 13, p. 85.

[2]) SCHUBERT oppert de mogelijkheid, dat de voorwaarden μ en ν te zamen met de twaalf degeneratievoorwaarden behalve σ voldoende zouden

744116

Uit het voorgaande blijkt, dat de voorwaarden μ en ν bij een kromme van hoogeren dan den tweeden graad geen aanspraak kunnen maken op den naam van *karakteristieken* [1]) in den daaraan door SCHUBERT toegekende beteekenis. Daarom worden de nog steeds belangrijke getallen μ en ν tegenwoordig gewoonlijk den *puntindex* en den *lijnindex* van het systeem genoemd. Reeds in 1861, dus voordat CHASLES zijn karakteristieken had ingevoerd, beschouwde DE JONQUIÈRES (**12** *Journ. de Liouville* (2) *t.* 6) krommensystemen van den *index* N (aantal krommen door een willekeurig punt; l. c. p. 113), zonder echter twee indices reciprook tegenover elkaar te stellen, waardoor zijn onderzoekingen niet de symmetrie van die van CHASLES verkrijgen [2]).

De besproken stelling van CHASLES ($k\mu + n\nu$) kan op verschillende wijzen worden uitgebreid. Een eerste uitbreiding bestaat daarin, dat het systeem van *algebraïsche krommen* kan worden vervangen door een systeem van *transcendente krommen*, mits dat systeem van dien aard is, dat er door *ieder* gegeven punt een *gelijk* eindig aantal (μ) der krommen gaan en er aan *iedere* gegeven rechte een *gelijk* eindig aantal (ν) krommen raken; de

---

zijn om alle overige enkelvoudige voorwaarden in uit te drukken, in welk geval voor een C_3^4 het enkelvoudige karakteristiekengetal 14 zijn zou (l. c. p. 288).

[1]) Deze benaming is overgenomen in PASCAL—SCHEPP. *Repertorium* II, p. 432.

[2]) DE JONQUIÈRES beschouwt de getallen N en m (graad der krommen) als kenmerkend voor het systeem. Hij spreekt dan het theorema uit, dat $2(m-1)N$ krommen van het systeem een gegeven rechte aanraken, hetgeen dus de lijnindex zijn zou. Dit theorema is klaarblijkelijk onjuist, zooals men b.v. ziet uit het systeem der kegelsneden, die aan vier gegeven rechten raken ($m=2$, $N=2$), waarvoor de lijnindex niet 4 maar 1 is. In 1863 waarschuwt DE JONQUIÈRES (**13** *Journ. de Liouville* (2) *t.* 8) dan ook zelf dat niet alle theorema's van (**12**) juist zijn, maar soms slechts een bovenste grens opleveren.

gegeven bewijzen gaan voor dat geval onveranderd door. Door FOURET (**106** *Comptes Rendus t.* 78, **107** *Bull. de la Soc. Math. t.* 2) zijn het eerst systemen van transcendente krommen in de beschouwing opgenomen. FOURET heeft de voorwaarde opgezocht, waaraan een gegeven transcendente kromme moet voldoen om deel te kunnen uitmaken van een systeem (μ, ν); is deze voorwaarde vervuld, dan kan de kromme slechts van *één* systeem deel uitmaken, terwijl bij een algebraïsche kromme natuurlijk een oneindig aantal systemen is aan te wijzen, waartoe ze behoort (**108** *Bull. de la Soc. Math. t.* 2, p. 97). FOURET toont verder aan, dat de krommen van het systeem (μ, ν) steeds kunnen worden voorgesteld als de integraalkrommen van een differentiaalvergelijking van de eerste orde

$$\varphi\,[\,(x, y)_\nu\,,\ (a, b)_\mu] = 0\,,$$

die in x en y van den graad ν, in a en b van den graad μ is. Hierin is

$$a = \frac{dy}{dx}\quad,\quad b = x\frac{dy}{dx} - y\,,$$

zoodat a en b ook als de lijn-coördinaten der raaklijn kunnen worden opgevat (**107** *Bull. de la Soc. Math. t.* 2, p. 74—75). Komen in de differentiaalvergelijking a en b niet voor $(\mu = 0)$, dan stelt de vergelijking een systeem van klasse-punten voor (punt-vergelijking der kromme $\varphi\,(x, y)_\nu = 0$). Ontbreken echter x en y $(\nu = 0)$, dan krijgt men een systeem van raaklijnen (lijn-vergelijking $\varphi\,(a, b)_\mu = 0$).

Bij zijn uitbreiding van de stelling van CHASLES tot transcendente krommen (waarbij de gegeven kromme natuurlijk algebraïsch moet blijven) beperkt FOURET (**107** p. 82) zich echter tot het geval, dat de gegeven kromme punt-algemeen dus $k = n\,(n-1)$ is. Voor het geval, dat de gegeven kromme willekeurige (ook hoogere) singulariteiten bezit, is de formule $k\mu + n\nu$ bewezen door HALPHEN (**113** *Journ. de Liouv.* (3) *t.* 2, p. 273) en wel volkomen streng zonder van een of andere aftellingsmethode gebruik te maken.

Alleen onderstelt HALPHEN bij al zijn beschouwingen een nauwkeurig omschreven onafhankelijkheid tusschen het krommensysteem en de gegeven kromme.

HALPHEN vat echter het vraagstuk algemeener op en bepaalt het aantal punten van een algebraïsche vlakke kromme, die aan een algebraïsche differentiaalvergelijking voldoen, die van de gegeven kromme onafhankelijk is [1]). Is de differentiaalvergelijking van de a^{de} orde, dan is deze vraag identiek met die naar het aantal (in het algemeen transcendente) integraalkrommen (die een systeem van de a^{de} orde vormen), die aan de gegeven kromme een aanraking van de a^{de} orde vertoonen.

HALPHEN vindt dat de gevraagde punten uit de gegeven kromme worden uitgesneden door een algebraïsche kromme Φ van den graad $p(n-1)+q$, waarin p en q geheele getallen zijn (p is bovendien steeds positief), die alleen van de differentiaalvergelijking afhangen op een wijze die nauwkeurig wordt aangegeven (l. c. theorema III en IV, p. 263 en 265). Van die snijpunten vallen er eenige in de meervoudige punten der gegeven kromme. Voor het aantal der buiten die punten vallende snijpunten vindt HALPHEN

$$pk + qn - L\,, \qquad \text{(l.c. verg. (16), p. 270)}$$

waarin L een geheele positieve of negatieve grootheid is, die zoowel van de differentiaalvergelijking als van de gegeven kromme afhangt en uitsluitend wordt opgeleverd door die takken der gegeven kromme, die CAYLEY (171) *superlineair* noemt. Heeft de gegeven kromme geen superlineaire takken (dus geen keerpunten, terwijl gewone dubbel- of meervoudige punten veroorloofd zijn), dan is het aantal der gevraagde punten $pk+qn$ (l. c. theorema V, p. 271).

Is de differentiaalvergelijking van de eerste orde ($a=1$), dan

---

[1]) Hierbij wordt natuurlijk ondersteld, dat de gegeven kromme geen integraalkromme der differentiaalvergelijking is.

blijkt $L=0$ te zijn, ook dan als de gegeven kromme hoogere singulariteiten heeft. Door achtereenvolgens $n=0$, $k=1$ en $n=1$, $k=0$ te stellen vindt men $p=\mu$, $q=\nu$ en dus voor het gevraagde aantal $\mu k+\nu n$.

Is de differentiaalvergelijking van de tweede orde ($a=2$) en heeft de gegeven kromme geen andere superlineaire takken dan takken met een keerpunt en wel ten getale van $\varkappa$, dan vindt HALPHEN voor het aantal gevraagde punten

$$qn+q'k+r\alpha, \text{ (l.c. theorema VIII, p. 277)}$$

waarin als vroeger $3k+\varkappa=3n+\beta=\alpha$ gesteld is. Hierin beteekent:

q het aantal integraalkrommen, die een gegeven rechte tot buigraaklijn hebben,

q' het hiermede reciproke aantal integraalkrommen, die in een gegeven punt een keerpunt hebben,

r het met zich zelf reciproke aantal integraalkrommen, die door een gegeven punt gaan en daar een gegeven raaklijn hebben.

De grootheid q verliest echter haar eenvoudige beteekenis als de integraalkrommen rechten zijn en dus de differentiaalvergelijking luidt: $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Dan volgt uit de beteekenis van q' en r onmiddellijk, dat $q'=0$ en $r=1$ is. Daarentegen is q nu negatief geworden, n.l. $=-3$.

Een andere uitbreiding, die de stelling van CHASLES ondergaan heeft, is die tot oppervlakken en ruimtekrommen. Hierbij wordt steeds de ligging van het systeem onafhankelijk gedacht van het gegeven oppervlak of de gegeven ruimtekromme. Dat oppervlak of die ruimtekromme mag echter willekeurige singulariteiten vertoonen.

Heeft men een ∞^1-systeem van oppervlakken, waarvan er μ door een gegeven punt gaan, ν een gegeven plat vlak en ρ een gegeven rechte aanraken, dan bedraagt het aantal oppervlakken, die een

gegeven oppervlak van den graad n, de klasse k en den rang r [1]) *aanraken*

$$k\mu + n\nu + r\varrho \text{ [2]}).$$

Deze stelling is het eerst uitgesproken door DE JONQUIÈRES (**114** *Comptes Rendus t.* 58) voor het geval, dat het gegeven oppervlak punt-algemeen is, en later door middel van niet geheel strenge continuïteitsbeschouwingen tot een willekeurig oppervlak uitgebreid (**115** *Comptes Rendus t.* 61). Een bewijs er voor is het eerst door A. BRILL (**117** *Math. Annalen Bd.* 8) geleverd. De stelling blijft onveranderd doorgaan als het gegeven oppervlak ontwikkelbaar is ($k = 0$) en in het hiermede reciproke geval, dat dit oppervlak door een kromme wordt vervangen, zooals het eerst is opgemerkt door ZEUTHEN (die zich daarbij echter tot systemen van kwadratische oppervlakken beperkt; **37** *Nouv. Annales* (2) *t.* 7). In het laatstgenoemde geval heeft men $n = 0$ te stellen, k door den rang r [3]) en r door den graad n der gegeven ruimtekromme te vervangen. Men vindt dan:

Het aantal oppervlakken van een systeem (μ, ν, ρ), *die een gegeven kromme van den graad n en den rang r aanraken, bedraagt*

$$r\mu + n\varrho \text{ [4]}).$$

---

[1]) Graad van den raaklijnenkegel door een willekeurig punt.

[2]) Voor het bewijs zie SCHUBERT's *Kalkül* p. 301 of SALMON—FIEDLER. *Analytische Geom. des Raumes* II (**119**), art. 460, p. 614—615.

[3]) Aantal raaklijnen, die een gegeven rechte snijden.

[4]) Voor het bewijs zie SCHUBERT's *Kalkül* p. 296. De stelling kan ook aldus bewezen worden.

Heeft de gegeven kromme geen keerpunten of hoogere singulariteiten, dan kan men ze in n elkaar op bepaalde wijze snijdende rechten laten degenereeren met in het geheel $\frac{1}{2}r$ snijpunten, die dan dubbelpunten der totaalkromme zijn. (Volgens de CAYLEY'sche vergelijkingen eener ruimtekromme [PASCAL—SCHEPP. *Repert.* II, p. 226] is de rang eener kromme zonder keerpunten een even getal.) M. a. w. men kan die kromme continu in n rechten doen overgaan zonder dat er zich iets bijzonders voordoet tot

Door BRILL (117) is verder nog een analoge stelling bewezen voor een systeem van ruimtekrommen, waarvan er μ een gegeven rechte snijden en ν een gegeven plat vlak aanraken. De bedoelde stelling luidt:

Het aantal ruimtekrommen van een systeem (μ, ν), *die een gegeven oppervlak van den graad* n *en den rang* r *aanraken, bedraagt*

$$r\mu + n\nu \text{ [1]}.$$

Ook in deze stelling kan het gegeven oppervlak door een kromme worden vervangen. Men krijgt dan:

Voor een systeem van ruimtekrommen, waarvan er μ *een gegeven rechte snijden, snijden er* $n\mu$ *een gegeven ruimtekromme van den graad* n [2].

---

aan het oogenblik van degenereeren. Na de degeneratie voldoen nu aan de vraag de $n\rho$ oppervlakken, die een der n rechten aanraken, en oneigenlijk de $\frac{1}{2}r\mu$ oppervlakken gaande door een der $\frac{1}{2}r$ snijpunten dier rechten. Voert men die n rechten in een niet-gedegenereerde C_n over, dan blijven eerstgenoemde oplossingen bestaan, terwijl ieder der laatstgenoemde oplossingen in *twee* eigenlijke oplossingen uiteenvalt, waardoor het totale aantal eigenlijke oplossingen $r\mu + n\rho$ wordt. Dit stelt ook nog het aantal oplossingen voor als C_n hoogere singulariteiten heeft. Zij n.l. S een singulier punt van C_n, dan voldoen de door S gaande oppervlakken van het stelsel oneigenlijk aan de vraag. Deze oppervlakken zullen echter (wegens de onafhankelijke ligging van C_n ten opzichte van het stelsel) in S niet aan C_n raken, zoodat daaraan dezelfde multipliciteit toekomt als bij de vraag naar de rakende platte vlakken door een willekeurige rechte. Hieruit volgt, dat als S den rang van C_n met een bedrag d vermindert het aantal eigenlijke oplossingen door S met μd verminderd wordt.

[1]) Een bewijs hiervoor vindt men ook in SCHUBERT's *Kalkül* p. 296.

[2]) Deze stelling, die bij BRILL niet voorkomt, kan ook weer gemakkelijk worden aangetoond door de ruimtekromme in n elkaar op bepaalde wijze snijdende rechten te laten degenereeren. Er zijn dan $n\mu$ ruimtekrommen van het systeem, die de gedegenereerde ruimtekromme snijden, terwijl nu

Ten slotte is voor een ruimtekrommensysteem van de 3de orde door SCHUBERT (*Kalkül* p. 296) nog de volgende stelling bewezen:

Het aantal ruimtekrommen van een ∞^3-systeem (waarvan er φ een gegeven rechte aanraken en χ een gegeven plat vlak in een gegeven punt aanraken), die een gegeven ruimtekromme van den graad n en den rang r aanraken, bedraagt

$$n\varphi + r\chi \text{ [1]}.$$

Is nu aan een algebraïsche vlakke- of ruimtekromme of oppervlak een voorwaarde opgelegd, die uit in deze paragraaf beschouwde voorwaarden is samengesteld (wordt b.v. in een plat vlak gevraagd naar het aantal krommen van den graad m, die aan $\frac{1}{2}m(m+3)$ gegeven krommen raken), dan kan men de methode der symbolische vermenigvuldiging toepassen, waarvan we in de volgende

---

de snijpunten der n rechten of de dubbelpunten der gedegenereerde ruimtekromme geen rol spelen. Immers bij willekeurige ligging van het ruimtekrommensysteem zal geen dier krommen door die dubbelpunten gaan. Op dezelfde wijze blijkt, dat de hoogere singulariteiten van C_n geen rol spelen, daar ook door deze punten geen krommen van het systeem gaan.

Men kan de stelling ook zeer eenvoudig aldus bewijzen. De ruimtekrommen van het stelsel vormen te zamen een algebraïsch oppervlak van den graad N. Gaan er door ieder punt van dit oppervlak p krommen van het stelsel, dan is $\mu = pN$. Het oppervlak wordt nu door C_n in nN punten gesneden, door ieder waarvan er p krommen van het stelsel gaan, zoodat $nNp = n\mu$ krommen van het stelsel de kromme C_n snijden.

[1]) Ook dit resultaat laat zich afleiden door de gegeven C_n in n elkaar op bepaalde wijze snijdende rechten te laten degenereeren. In een snijpunt van twee dier rechten is dan de raaklijn aan C_n onbepaald in het vlak door die beide rechten. Een kromme van het stelsel, die in dat snijpunt aan dat vlak raakt, is dus als rakend aan C_n te beschouwen en dus een oplossing en wel met een multipliciteit twee.

paragraaf een voorbeeld zullen geven. Het aantal dier krommen of oppervlakken is dan gevonden, zoodra men de *elementairgetallen* kent, d. w. z. (om ons tot krommen in een plat vlak te bepalen) de aantallen krommen, die aan een $\omega = \frac{1}{2} m (m + 3)$-voudige uit de elementaire voorwaarden μ en ν samengestelde voorwaarde voldoen. Op de bepaling dier elementairgetallen komt het dus aan wil men tot dergelijke problemen kunnen overgaan.

---

§ 16. *Onderzoekingen van* Krey *omtrent aantallen algebraïsche krommen van den m^{den} graad.*

Terwijl de vorige paragraaf uitsluitend over aanrakingsvoorwaarden handelde deelen we nu nog het een en ander mede omtrent aantallen algebraïsche krommen van den m^{den} graad, die aan op de singulariteiten dier krommen betrekking hebbende voorwaarden voldoen. In de eerste plaats zij dan vermeld, dat door Cayley (**122** *Cambr. Phil. Trans. Vol.* 11, *Coll. Pap. Vol.* 5) gevonden is, dat er door $\frac{1}{2} m (m + 3) - 2$ gegeven punten $12 (m - 1) (m - 2)$ krommen van den m^{den} graad gaan, die een *vrij* (d.w.z. niet gegeven) keerpunt hebben en $^3/_2 (m - 1) (m - 2) (3m^2 - 3m - 11)$ krommen, die twee vrije dubbelpunten bezitten. Dit laatste resultaat, dat Cayley door inductie verkregen heeft, is bewezen door Cremona (**123** *Ann. di Mat. t.* 6) en de Jonquières (**125** *Math. Ann. Bd.* 1).

Veel meer omvattend zijn echter de onderzoekingen van Krey (**132** *Acta Math. Bd.* 7). Krey maakt hierbij gebruik van de in § 14 besproken onderzoekingsmethode van Zeuthen. Bij al zijn beschouwingen onderstelt hij echter de degeneratie α' van Zeuthen niet aanwezig, dus $\alpha' = 0$. De methode van Krey komt nu hier op neer, dat uit de formules van Zeuthen recursieformules worden afgeleid, waarmede de op het systeem betrekking hebbende aantallen kunnen worden berekend als die voor alle *lagere* systemen reeds

bekend zijn. Hij noemt een systeem van krommen met d_1 dubbelpunten en e_1 keerpunten *lager* dan een systeem, waarvoor die getallen d en e zijn, als òf $d_1 + e_1 < d + e$ òf $d_1 + e_1 = d + e$ maar $e_1 < e$ is. Op deze wijze weet KREY van lagere systemen uitgaande tot steeds hoogere systemen op te klimmen en zoo een groot aantal resultaten (o.a. ook die van CAYLEY) op krommen van den m^{den} graad betrekking hebbend te verkrijgen. Om den aard dier resultaten te kenmerken noem ik er eenige op:

I. *Door* $\frac{1}{2} m (m + 3) - 4$ *gegeven punten gaan*

$$\frac{3}{2} (9m^5 - 45m^4 - 8m^3 + 259m^2 - 129m - 250)$$

krommen C_m, *die op een gegeven rechte een dubbelpunt en boven dien nog twee vrije dubbelpunten hebben* (l. c. p. 61).

II. *Door* $\frac{1}{2} m (m + 3) - 6$ *gegeven punten gaan* $9 (m - 1) (3m^2 - 6m - 4)$ *krommen* C_m, *die op drie verschillende gegeven rechten een dubbelpunt hebben, en* $\frac{1}{2} (m - 3) (9m^2 - 75m + 154)$ *krommen, die op eenzelfde gegeven rechte drie dubbelpunten hebben* (l. c. p. 62 en 63).

III. *Door* $\frac{1}{2} m (m + 3) - 3$ *gegeven punten gaan* $12 (m - 3) (3m^3 - 6m^2 - 11m + 18)$ *krommen* C_m *met een vrij dubbelpunt en een vrij keerpunt* (l. c. p. 64).

IV. *Door* $\frac{1}{2} m (m + 3) - 4$ *gegeven punten gaan* $60 (m - 3) (3m - 5)$ *krommen* C_m, *die een vrij snavelpunt hebben* (l. c. p. 65).

V. *Door* $\frac{1}{2} m (m + 3) - 6$ *gegeven punten gaan* $36 (m - 4) (5m^3 - 15m^2 - 26m + 76)$ *krommen* C_m, *die een vrij drie-voudig punt en een vrij keerpunt hebben* (l. c. p. 65).

Dit zijn slechts eenige eenvoudige voorbeelden van de vele door KREY verkregen resultaten, die zijn methode volgend gemakkelijk te vermeerderen zijn als men niet tegen wat rekenwerk opziet. Bij al die resultaten moet men bedenken dat m voldoend groot moet zijn om een juiste uitkomst te verkrijgen. Welke waarde m

daartoe minstens hebben moet is echter in de meeste gevallen onmiddellijk te zien. Zoo moet b.v. om op eenzelfde rechte 3 dubbelpunten te kunnen krijgen m minstens de waarde 6 hebben, enz. Bij al zijn formules geeft KREY dan ook aan welke waarde men minstens aan m moet toekennen willen er in het algemeen slechts ongedegenereerde oplossingen voorkomen. In sommige gevallen evenwel vindt men ook nog bij een kleinere waarde van m het juiste antwoord als men n.l. gedegenereerde oplossingen medetelt of als dit antwoord *nul* is. Als er geen oplossingen mogelijk zijn is het echter niet zeker dat de formule dan nul oplevert. Zoo vindt men b.v. voor $m=3$ naar behooren *nul* krommen met een vrij snavelpunt. Voor $m=5$ levert de formule voor het aantal krommen met drie dubbelpunten op een gegeven rechte daarentegen niet nul op. De onder I medegedeelde formule van KREY geeft uitsluitend niet-gedegenereerde oplossingen voor $m>4$; echter is de formule ook nog juist voor $m=3$ en $m=4$; voor $m=3$ b.v. vindt men 30 en dit is ook werkelijk het aantal kubische krommen door 5 gegeven punten met een dubbelpunt op een gegeven rechte en 2 vrije dubbelpunten, aan welke vraag alleen door in drie rechten gedegenereerde krommen voldaan wordt; voor $m=2$ evenwel geeft de formule niet het juiste antwoord (nul).

Verder leidt KREY nog een formule af voor het aantal krommen van den graad m met een vrij t-voudig en een vrij t_1-voudig punt en gaande door zooveel gegeven punten als voor de bepaling der kromme nog noodig is (l.c. § 3). Deze formule is echter te gecompliceerd om hier mede te deelen.

KREY strekt zijn onderzoekingen ook uit tot vlakke krommen in de ruimte. Vermeldenswaard is hierbij het volgende resultaat:

VI. *Het aantal vlakke krommen van den m^{den} graad, die in de ruimte $\frac{1}{2}m(m+3)+3$ gegeven rechten snijden, bedraagt*

$$\frac{1}{324}m(m^2-1)(m+2)(2m^5+14m^4+49m^3+91m^2+90m+18)$$

(l. c. § 4).

Voor $m = 1$ levert dit naar behooren *nul*, daar er geen rechte mogelijk is, die op 5 willekeurig gegeven rechten rust. Voor $m = 2$ vindt men voor het aantal kegelsneden, die op 8 gegeven rechten rusten, 92 in overeenstemming met LÜROTH (**38** *Crelle's Journal Bd.* 68) [1]).

Deze formule kan nog een uitbreiding ondergaan (die KREY er echter niet aan geeft) door de $\omega = \frac{1}{2} m (m + 3) + 3$ gegeven rechten door gegeven ruimtekrommen resp. van den graad $n_1, n_2, \ldots, n_\omega$ te vervangen. In § 15 is ons n.l. gebleken, dat voor een ruimtekromme (en dus ook voor een vlakke kromme met beweeglijk vlak) de voorwaarde een gegeven ruimtekromme van den graad n te snijden kan worden voorgesteld door $n\mu$, waarin μ de voorwaarde beteekent een gegeven rechte te snijden. Door symbolische vermenigvuldiging vindt men dus voor de voorwaarde op ω gegeven ruimtekrommen te rusten $n_1 n_2 \ldots n_\omega \mu^\omega$, zoodat het gezochte aantal alleen van het ééne elementairgetal μ^ω afhangt. We vinden dus:

Het aantal vlakke krommen van den graad m, die in de ruimte op $\omega = \frac{1}{2} m (m + 3) + 3$ *gegeven vlakke- of ruimtekrommen resp. van den graad* $n_1, n_2, \ldots, n_\omega$ *rusten, bedraagt*

$$\frac{1}{324} m (m^2 - 1)(m + 2)(2m^5 + 14m^4 + 49m^3 + \\ + 91m^2 + 90m + 18) n_1 n_2 \ldots n_\omega \text{ [2]}).$$

Vervolgens gaat KREY (l. c. § 5 en 6) bij vlakke krommen in

---

[1]) Zie ook SCHUBERT (**39** *Crelle's Journal Bd.* 71) en J. DE VRIES (**40** *Verslagen der Kon. Akad. van Wetensch.* 1901).

[2]) Tot dit resultaat kan men ook komen door ieder der gegeven krommen in elkaar op bepaalde wijze snijdende rechten te laten degenereeren. Men kan nu op $n_1 n_2 \ldots n_\omega$ verschillende manieren bij ieder dier gedegenereerde krommen een rechte uitzoeken om de vlakke krommen C_m op te laten rusten, zoodat men het door KREY opgegeven aantal slechts met $n_1 n_2 \ldots n_\omega$ te vermenigvuldigen heeft.

de ruimte over tot de beschouwing der singulariteiten. Hij maakt hierbij gebruik van de uitbreiding tot de ruimte, die SCHUBERT (**94** *Math. Annalen Bd.* 13) aan de formules van ZEUTHEN (**90**) gegeven heeft, met herstelling van een in de vergelijking (15) van SCHUBERT (l. c. p. 445) voorkomende onjuistheid. Op deze wijze verkrijgt KREY resultaten, die analoog zijn met die bij krommen in een vast vlak, waarvan we er boven eenige mededeelden.

VIERDE HOOFDSTUK.

FORMULE VAN DE JONQUIÈRES.

---

§ 17. *Correspondentieprincipe van* CHASLES *en dat van* CAYLEY *en* BRILL.

In 1855 is door CHASLES (**133** *Comptes Rendus t.* 41) het beginsel uitgesproken, dat als tusschen de puntenparen op een rechte een zoodanige algebraïsche verwantschap bestaat, dat met ieder punt Q één punt Q' overeenkomt en omgekeerd, deze verwantschap een bilineaire is en er dus twee samenvallende puntenparen (coincidenties) zijn. In 1864 heeft CHASLES (**134** *Comptes Rendus t.* 58) dit tot het volgende naar hem genoemde beginsel uitgebreid:

Bestaat er tusschen de puntenparen Q, Q' van een rechte lijn een zoodanige algebraïsche correspondentie, dat met ieder punt Q a' punten Q' en met ieder punt Q' a punten Q overeenkomen, dan bedraagt het aantal coincidenties

$$N = a + a' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Men spreekt in dat geval van een (a, a') correspondentie.

Dit correspondentiebeginsel komt reeds eerder (1861) voor bij DE JONQUIÈRES (**12** *Journ. de Liouville* (2) *t.* 6), die er echter het groote belang niet van schijnt in te zien, daar het beginsel niet formeel wordt uitgesproken. Het wordt daar alleen toegepast bij het bewijs van een tweetal stellingen (Théorème V, p. 117 en

Théorème VII, p. 118), waar het bewijs van het correspondentiebeginsel (DE JONQUIÈRES geeft er dien naam echter niet aan) door heen gevlochten wordt.

Van veel grooter beteekenis is het correspondentiebeginsel echter voor CHASLES. Met behulp van dat beginsel bepaalt deze zeer vele op kegelsneden betrekking hebbende aantallen, waardoor hij er toe geleid wordt zijn beroemde stelling $\alpha\mu + \beta\nu$ uit te spreken, en ook later nog is dat beginsel voor hem een bron om duizenden aantallen op te sporen.

Het is duidelijk, dat de $a + a'$ coincidenties niet noodzakelijk van elkaar verschillend behoeven te zijn, zoodat het kan voorkomen dat één en hetzelfde punt voor meerdere coincidenties in rekening moet worden gebracht. Om het correspondentiebeginsel in alle gevallen met zekerheid te kunnen toepassen moet men dus met de multipliciteit dier coincidenties volkomen bekend zijn. Dienaangaande heeft ZEUTHEN (**137** *Nouv. Annales* (2) *t.* 6, **138** *Bulletin des sciences math.* (1) *t.* 5) den volgende regel gegeven:

Het aantal in een punt P samenvallende coincidenties is gelijk aan de som der orden der oneindig kleine segmenten QQ' begrepen tusschen een punt Q, waarvan de afstand tot P een oneindig kleine der eerste orde is, en de correspondeerende punten Q' [1]).

In 1866 breidt CHASLES (**135** *Comptes Rendus t.* 62) zijn beginsel uit tot *rationale krommen* [2]) zoowel in het platte vlak als in de ruimte, waarvoor het onveranderd doorgaat. Dit is een rechtstreeksch

---

[1]) Het is hierbij onverschillig of men *alle* met Q correspondeerende punten Q' neemt of alleen die, welke tegelijk met Q tot P naderen; immers een eindige afstand is als van de nulde orde te beschouwen. Verder kan men ook uitgaan van een punt Q', dat op een oneindig kleinen afstand van de eerste orde van P verwijderd is, en dit combineeren met de correspondeerende punten Q; in beide gevallen is het resultaat hetzelfde.

[2]) *Unicursaalkrommen* volgens CAYLEY (**167** art. 7), *krommen van het geslacht nul* volgens CLEBSCH (**165**).

gevolg van het theorema van LÜROTH (**168** *Math. Annalen Bd.* 9), volgens hetwelk een rationale kromme éénduidig op een rechte is af te beelden [1]). Onmiddellijk op deze mededeeling van CHASLES volgt er echter reeds een van CAYLEY (**143** *Comptes Rendus t.* 62, *Coll. Pap. Vol.* 5; zie ook **144** *Proc. of the Lond. Math. Soc. Vol.* 1 of **145** *Phil. Trans. Vol.* 158 beide *Coll. Pap. Vol.* 6), waarin het beginsel tot krommen van willekeurig geslacht wordt uitgebreid, en wel aldus:

Heeft men op een vlakke kromme C_n van het geslacht g een (a, a') correspondentie tusschen de punten Q en Q' zoodanig, dat de a' punten Q' behoorend bij een punt Q de overige snijpunten zijn van C_n met een van Q afhankelijke kromme Θ, die C_n in c samenvallende punten Q snijdt, dan bedraagt het aantal coincidenties

$$N = a + a' + 2cg.$$

CAYLEY bewijst deze stelling evenwel slechts voor het geval, dat het samenvallen van c snijpunten in het punt Q daardoor veroorzaakt wordt, dat de kromme Θ in Q een c-voudig punt bezit, terwijl juist bij alle toepassingen, die CAYLEY van zijn beginsel maakt, de krommen C_n en Θ in Q een c-puntige aanraking vertoonen; in het laatste geval spreekt men van *aanrakingscorrespondenties.*

Voor dat geval is het correspondentiebeginsel aangetoond door BRILL (**146**, **147** en **151** *Math. Annalen Bd.* 6, 7, 31). Verder onderstelt BRILL nog de aanwezigheid van *„uitzonderingspunten"*, d.w.z. punten, waar alle krommen Θ één- of meermalen doorheen gaan.

---

[1]) Bij een rationale kromme kunnen n.l. de coördinaten van een punt als rationale functies van een parameter λ worden uitgedrukt, zoodat met iedere waarde van λ *één* punt der kromme overeenkomt. Het omgekeerde behoeft echter niet het geval te zijn. Door LÜROTH is nu aangetoond, dat dan steeds een andere parameter λ' zoodanig kan worden gekozen, dat wel bij ieder punt (dubbelpunten uitgezonderd) *één* waarde van λ' behoort, hetgeen vroeger zonder bewijs werd aangenomen.

Hiertoe wordt men vanzelf gevoerd door de eigenschap, dat de correspondentieformule *invariant tegenover birationale transformaties* of *rationaal-invariant* is; immers de grootheden N, a, a', c en g zijn ieder op zichzelf rationaal-invariant. Het aantal der uitzonderingspunten daarentegen ondergaat bij birationale transformatie wel verandering; ze ontstaan er door als ze oorspronkelijk niet aanwezig waren, waarom hun aanwezigheid reeds van te voren ondersteld wordt. CAYLEY echter, bij wien het rationaal-invariante karakter der correspondentieformule geen rol speelt, denkt stilzwijgend deze uitzonderingspunten te ontbreken.

Zijn x, y de coördinaten van Q en x', y' die van Q', dan kan de correspondentie worden voorgesteld door de vergelijking

$$\Theta(x, y \;;\; x', y') = 0,$$

die met ieder punt Q een kromme Θ laat overeenkomen, door BRILL de *correspondentiekromme* genoemd. Ondersteld wordt, dat deze kromme in Q zelf een c'-voudig punt heeft [1]; c' wordt dan door BRILL de *waardigheid* der correspondentie genoemd. Bovendien gaan alle correspondentiekrommen door eenige vaste *uitzonderingspunten.*

Denken we nu het punt Q op een algebraïsche kromme C_n gelegen, dan snijdt de correspondentiekromme van Q de kromme C_n:

1°. in de op C_n gelegen uitzonderingspunten (dit kunnen tevens singuliere punten van C_n zijn),

2°. eenige malen in het punt Q zelf,

3°. in eenige punten, die met Q van plaats veranderen, zonder het punt Q zelf te zijn.

De snijpunten van de 3de soort vormen de a' met Q correspondeerende punten Q'. Het aantal c der snijpunten van de tweede soort is minstens gelijk aan de waardigheid c' der correspondentie; hebben we met een aanrakingscorrespondentie te doen,

---

[1]) Hierin ligt ook het geval begrepen, dat de correspondentiekromme niet door Q gaat; dan is n.l. $c' = 0$.

dan is $c > c'$; in dat geval noemt BRILL c de *waardigheid* der correspondentie *ten opzichte der kromme* C_n.

Men kan natuurlijk even goed de correspondentiekrommen van punten Q' van C_n beschouwen, die dan de punten Q uitsnijden. BRILL bewijst dan ook, dat de correspondentiekromme van Q' de de kromme C_n in evenveel punten Q' snijdt als de correspondentiekromme van Q in punten Q, zoodat men in beide gevallen op hetzelfde getal c uitkomt.

De coincidenties worden nu uit C_n uitgesneden door de *„coincidentiekromme ten opzichte van* C_n", waarvan de vergelijking uit $\Theta(x, y; x', y') = 0$ alleen dan wordt afgeleid door eenvoudig $x = x'$ en $y = y'$ te stellen, als de waardigheid der correspondentie nul is; in andere gevallen moeten eerst herleidingen worden toegepast om een identiteit te vermijden. Sommige snijpunten van C_n met de coincidentiekromme vallen in de op C_n gelegen uitzonderingspunten en deze moeten niet medegeteld worden. Ook vallen er snijpunten in de singuliere punten van C_n. Deze kunnen nog als *wezenlijke* en *onwezenlijke coincidenties* worden onderscheiden. Een coincidentiepunt P noemen we *wezenlijk* als bij nadering van Q tot P een der correspondeerende punten Q' langs *denzelfden tak* [1]) van C_n tot P nadert; een voorbeeld hiervan levert een in een keerpunt vallende coincidentie. Valt er daarentegen een coincidentie in een gewoon dubbelpunt van C_n op zoodanige wijze dat Q en Q' langs verschillende takken er toe naderen, dan is de coincidentie *onwezenlijk* en wordt niet medegeteld. Het kenmerk van beide soorten coincidenties is, *dat de wezenlijke coincidenties door birationale transformaties in gewone coincidenties kunnen veranderd worden, terwijl men de onwezenlijke coincidenties door birationale transformaties kan doen verdwijnen.* Alleen het aantal *wezenlijke* coincidenties is dus *rationaal-invariant.*

---

[1]) Onder een *tak* verstaan we het geheel der punten, wier coördinaten aan eenzelfde PUISEUX'sche reeksontwikkeling voldoen.

Het spreekt van zelf, dat er ook nu coincidenties kunnen samenvallen. Behooren de samenvallende coincidenties bij eenzelfden tak van C_n, dan is ook dat een rationaal-invariante eigenschap.

Door BRILL is nu bewezen, *dat het aantal wezenlijke coincidenties*

$$N = a + a' + 2cg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

bedraagt, ook dan als C_n hoogere singulariteiten bezit.

BRILL (**151** *Math. Annalen Bd.* 31) bepaalt verder nog het aantal N' der *niet in de singuliere punten vallende coincidenties.* Hij geeft daarvoor een formule op, die voor het geval dat C_n slechts keerpunten ten getale van $\varkappa$ bezit luidt:

$$N' = a + a' + 2cg - c\varkappa \text{ [1]},$$

hetgeen dus hier op neer komt, dat er in ieder keerpunt c wezenlijke coincidenties vallen.

Volgens mij is deze laatste formule alleen dan juist als de correspondentie *geen* aanrakingscorrespondentie is [2]. De fout, die m. i. in de afleiding van BRILL schuilt, kan ik niet aanwijzen zonder zijn geheele redeneering hier te herhalen. Ik volsta daarom met de onjuistheid aan een eenvoudig voorbeeld te laten zien. Daartoe nemen we voor de correspondentiekromme van een op C_n gelegen punt Q de raaklijn in Q aan C_n, zoodat Q' een der $n-2$ tangentiaalpunten van Q is. Bij deze correspondentie is klaarblijkelijk $a = k - 2$, $a' = n - 2$, $c = 2$. Daar $2g = k - 2n + 2 + \varkappa$ is, vindt

---

[1]) De formule, die BRILL geeft voor het geval, dat C_n hoogere singulariteiten bezit, stemt met deze formule overeen, mits men slechts die singulariteiten door zooveel keerpunten vervangt als er volgens CAYLEY (**171**) mede aequivalent zijn. Natuurlijk kunnen in bijzondere gevallen nog meerdere coincidenties met de keerpunten samenvallen, reden waarom het gegeven getal N' slechts als een *maximaal aantal* te beschouwen is.

[2]) De juiste formule luidt vermoedelijk:

$$N' = a + a' + 2cg - c'\varkappa .$$

Zie omtrent c' p. 115.

men voor het aantal wezenlijke coincidenties volgens vergelijking (37):

$$N = 3\,(k - n) + 2\varkappa\,.$$

De coincidenties worden nu opgeleverd door de $3\,(k - n) + \varkappa$ buigpunten en door de keerpunten; uit bovenstaande vergelijking volgt dan, dat ieder keerpunt *één* coincidentie absorbeert [1]) en dus niet, zooals volgens de BRILL'sche formule voor N' het geval zou moeten zijn, voor $c = 2$ coincidenties telt. Deze formule levert ten onrechte voor het aantal buiten de keerpunten gelegen coincidenties $3\,(k - n)$ op [2]).

Dit voorbeeld bewijst daarom de onjuistheid der formule voor N' omdat men *minder* in de keerpunten vallende wezenlijke coincidenties vindt dan de formule aanwijst. De formule zou *in het algemeen* nog juist kunnen zijn ook al vielen er in een bijzonder geval *meer* coincidenties in een keerpunt dan verwacht werd.

De formule voor N' schijnt echter voor BRILL geen groote beteekenis te hebben, daar hij voornamelijk op het rationaal-invariante karakter der correspondentieformule gewicht legt, in welk geval natuurlijk in keerpunten vallende coincidenties met gewone coincidenties gelijk staan. In het overzicht, dat BRILL en NOETHER van de theorie der algebraïsche correspondenties geven (**157** *Jahresber. der Deutschen Math. Ver. Bd.* 3), wordt de bestreden formule dan ook niet vermeld.

Voor de correspondentieformule zijn nog een groot aantal andere bewijzen geleverd. SCHUBERT geeft in § 18 van zijn *Kalkül* een op de meetkunde van het aantal berustend bewijs, echter slechts voor het geval, dat de correspondentie geen aanrakingscorrespondentie is.

Andere afleidingen zijn nog gegeven door BOBEK (**150** *Wiener Ber. Bd.* 93 II), ZEUTHEN (**153** *Math. Annalen Bd.* 40), SPORER (**154** *Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd.* 39) e. a. ZEUTHEN geeft tevens een uitbreiding van zijn reeds vermelden regel om de multipliciteit van

---

[1]) Dat dit zoo is vindt men ook bij CAYLEY (**145**, art. 101).

[2]) Men geeft aan dit voorbeeld zijn eenvoudigsten vorm door voor C_n een kubische kromme met keerpunt te nemen.

een coincidentie te bepalen (l. c. § I), die ook geldt voor het geval, dat de coincidentie in een singulier punt der kromme valt. In de nabijheid van een (al of niet singulier) punt S kunnen n.l. de coördinaten van een punt der kromme worden voorgesteld door ontwikkelingen naar opklimmende geheele positieve machten van een parameter λ. Men kan nu λ als abscis van een punt op een rechte beschouwen, waardoor men de kromme in de buurt van het punt S afgebeeld krijgt op een rechte. Bepaalt men nu op deze rechte met den reeds vermelden regel (zie p. 113) de multipliciteit van het afgebeelde coincidentiepunt, dan is dit tevens de multipliciteit van het oorspronkelijke punt S als coincidentie. Verder zij nog vermeld, dat ZEUTHEN (l. c. § III) ook een handelwijze heeft aangegeven, die met voordeel in die gevallen kan worden toegepast, waarbij de waardigheid negatief (zie § 18) of onbekend is.

---

§ 18. *Samengestelde correspondenties.*

Een uitbreiding, die CAYLEY reeds aan zijn formule gaf, bestaat in de beschouwing van zoogenaamde *samengestelde correspondenties.* Het is n.l. mogelijk, dat de correspondentiekromme van een punt Q van C_n deze kromme in verschillende groepen van punten snijdt, en wel (behalve in c punten Q en in uitzonderingspunten van C_n, welke laatste CAYLEY echter niet beschouwt) in een groep van a'_1 punten Q'_1 ieder met een multipliciteit p_1, in een groep van p_2-voudige snijpunten Q'_2 ten getale van a'_2, enz. Men krijgt dan verschillende correspondenties, (Q, Q'_1) , (Q, Q'_2), enz., te zamen een *samengestelde correspondentie* vormend. Is nu N_1 het aantal coincidenties der correspondentie (Q, Q'_1), N_2 dat der correspondentie (Q, Q'_2), enz., dan is volgens CAYLEY (144 art. 8):

$$p_1 (N_1 - a_1 - a'_1) + p_2 (N_2 - a_2 - a'_2) + \ldots = 2cg ,$$

waarin a_1 het aantal met Q'_1 correspondeerende punten Q is, enz.

Ook deze formule is door BRILL (**146** *Math. Annalen Bd.* 6) bewezen.

Als voorbeeld nemen we dat, waardoor CAYLEY (**144** art. 9) tot de beschouwing van samengestelde correspondenties gekomen is. Ter bepaling van het aantal dubbelraaklijnen neemt CAYLEY voor de correspondentiekromme van een punt Q van C_n het geheel der $k-2$ raaklijnen, die men uit Q nog aan C_n trekken kan ($c=k-2$). Met Q correspondeeren dan de $k-2$ raakpunten Q'_1 ($p_1=2$) en de $(k-2)(n-3)$ overige snijpunten Q'_2 ($p_2=1$). Nu is echter de correspondentie (Q, Q'_1) niets anders dan de reeds vroeger [1]) besproken correspondentie, waarbij de correspondentiekromme van Q'_1 de raaklijn in Q'_1 is; voor deze correspondentie is dus de formule (37) van toepassing, terwijl $c_1=2$ is. Men heeft dus:

$$p_1(N_1-a_1-a'_1)+p_2(N_2-a_2-a'_2)=2cg\,,$$

en:

$$N_1-a_1-a'_1=2c_1g\,,$$

waaruit volgt:

$$N_2=a_2+a'_2+2\,\frac{c-p_1c_1}{p_2}\,g\,.$$

Men ziet dus, dat de overblijvende correspondentie (Q, Q'_2) *formeel* aan de vergelijking (37) voldoet met een waardigheid:

$$c_2=\frac{c-p_1c_1}{p_2}\,,$$

die nu echter geen eenvoudige beteekenis meer heeft.

Het is duidelijk, dat in dergelijke gevallen de waardigheid ook *negatief* zou kunnen uitvallen [2]).

Een samengestelde correspondentie krijgt men dus in het alge-

---

[1]) Als voorbeeld om de onjuistheid der BRILL'sche formule voor N' aan te toonen.

[2]) In het gegeven voorbeeld kan dit geval zich voordoen, daar $c=k-2$, $c_1=2$, $p_1=2$, $p_2=1$, dus $c_2=k-6$ is. Voor $k=3$, 4 of 5 wordt dus de waardigheid der overblijvende correspondentie negatief.

meen, als de snijpunten der 3de soort van C_n met de correspondentiekromme van Q zich in rationaal scheidbare groepen verdeelen (waarbij aan de snijpunten van eenzelfde groep eenzelfde multipliciteit toekomt), zonder dat daarom de correspondentievergelijking zelf splitsbaar is of met behulp van de vergelijking der gegeven kromme splitsbaar gemaakt kan worden [1]). Doet zich nu het geval voor, dat al die partieel-correspondenties (Q, Q'_1), (Q, Q'_2), enz. zich laten isoleeren op één na, dan voldoen die isoleerbare correspondenties aan de formule (37) en de niet-isoleerbare *formeel* dus ook. Deze niet-isoleerbare correspondentie is door LINDEMANN (31 CLEBSCH's *Vorl. Bd.* 1, p. 747 noot) voorgesteld als een niet-uitvoerbaar quotient van verschillende correspondenties, dus in den vorm:

$$\frac{\varphi(x, y; x', y')}{\varphi_1^{p_1}(x, y; x', y')\, \varphi_2^{p_2}(x, y; x', y') \ldots}.$$

De waardigheid dezer correspondentie is gelijk aan $c - p_1 c_1 - p_2 c_2 - \ldots$ en kan dus negatief zijn. De coincidentievergelijking is nu splitsbaar of kan met behulp van de vergelijking der gegeven kromme splitsbaar gemaakt worden; de verschillende deelen der coincidentiekromme behooren dan $p_1, p_2, \ldots$ maal tot de totale coincidentiekromme en snijden ieder een bepaald soort coincidenties uit de oorspronkelijke kromme uit. Deze voorstelling als quotient is de meest algemeene algebraïsche voorstelling van een correspondentie met negatieve waardigheid.

Een eenvoudig voorbeeld van zulk een door een quotient voorgestelde correspondentie met negatieve waardigheid geeft BRILL (151 *Math. Annalen Bd.* 31, § 13). Zij C_n de gegeven kromme, die door de punten in het oneindige der X- en Y-as gaat, en wier vergelijking dus luidt:

$$f(x, y) = Axy + B = 0,$$

---

[1]) Met de coincidentievergelijking is dit wel mogelijk.

waarin A en B geheele rationale functies van x en y van den graad $n-2$ resp. $n-1$ zijn. Door een punt $Q''(x'', y'')$ van C_n trekt men een rechte evenwijdig aan de X-as, die C_n in $n-2$ in het eindige gelegen punten $Q'(x', y')$ snijdt, en een rechte evenwijdig aan de Y-as, die $n-2$ in het eindige gelegen snijpunten $Q(x, y)$ oplevert. Tusschen Q en Q' bestaat dan een $((n-2)^2, (n-2)^2)$ correspondentie. De correspondentievergelijking vindt men door uit

$$x = x'', \; y' = y'' \text{ en } f(x'', \; y'') = 0$$

x'' en y'' te elimineeren en luidt dus:

$$f(x, \; y') = 0.$$

De correspondentiekromme van Q bestaat dus uit de $n-1$ rechten evenwijdig aan de X-as getrokken door de $n-1$ in het eindige gelegen snijpunten (Q zelf medegerekend) van C_n met een rechte door Q evenwijdig aan de Y-as; de correspondentiekromme van Q' krijgt men door X, Y en Q, Q' te verwisselen. De vergelijking stelt dus een $(n(n-2), n(n-2))$ correspondentie voor, waarvoor $c=1$ is. Deze correspondentie bevat echter, als men die uitsluitend op de kromme C_n beschouwt, twee isoleerbare correspondenties met correspondentievergelijkingen $x=x'$ en $y=y'$. Zonder de vergelijkingen $f(x, y)=0$ en $f(x', y')=0$, die uitdrukken dat Q en Q' op C_n liggen, is de correspondentie echter niet splitsbaar. De overblijvende correspondentie is onze oorspronkelijke $((n-2)^2, (n-2)^2)$ correspondentie, die niet geïsoleerd kan worden voorgesteld, maar volgens LINDEMANN geschreven wordt in den vorm van het niet uitvoerbare quotient:

$$\frac{f(x, y')}{(x-x')(y-y')} = 0.$$

De correspondenties $x=x'$ en $y=y'$ zijn beide $(n-2, n-2)$ correspondenties, waarvoor $c=1$ is. De overblijvende niet-isoleerbare correspondentie is dus een $((n-2)^2, (n-2)^2)$ correspondentie met

een waardigheid $1-1-1=-1$. Naar behooren is het aantal coincidenties daarvan gelijk aan

$$(n-2)^2+(n-2)^2+2(-1)g.$$

Het begrip *„negatieve waardigheid"* is het eerst door HURWITZ (149 *Math. Annalen Bd.* 28) ingevoerd. Nadat LINDEMANN (148 *Crelle's Journ. Bd.* 84, 31 CLEBSCH's *Vorl.* p. 720—753) aan het correspondentiebeginsel een transcendente formuleering gegeven had, is later op andere wijze door HURWITZ de correspondentie op een RIEMANN'sch oppervlak eveneens met hulpmiddelen uit de functietheorie onderzocht. Het begrip *correspondentie* is dan daardoor gedefinieerd, dat met een punt Q van het RIEMANN'sche oppervlak a' punten Q' zoodanig overeenkomen, dat die a' punten Q' slechts onderling verwisselen als Q op het oppervlak een gesloten baan beschrijft. De correspondentie is *algebraïsch* als het verband tusschen Q en Q' *analytisch* is. Bij zijn onderzoekingen is HURWITZ tot correspondenties gekomen, die niet door één, maar minstens door twee correspondentievergelijkingen worden voorgesteld, die een deel hunner oplossingen gemeenschappelijk hebben. Deze correspondenties zijn òf correspondenties met negatieve waardigheid òf dezulke, die door HURWITZ *singuliere correspondenties* genoemd zijn. Daartegenover staan de *waardigheidscorrespondenties*, die een positieve of negatieve waardigheid hebben.

Deze singuliere corrrespondenties worden voorgesteld door twee van elkaar onafhankelijke correspondentievergelijkingen, die echter op de kromme, waarop we de correspondentie beschouwen, toch nog een oneindig aantal gemeenschappelijke oplossingen toelaten [1]). Voor het aantal coincidenties van een dergelijke singuliere corre-

---

[1]) Een correspondentievergelijking vertegenwoordigt ∞^3 correspondeerende puntenparen. Twee van elkaar onafhankelijke vergelijkingen hebben dus ∞^2 puntenparen gemeen, waarvan er op een willekeurige kromme ∞^0, dus een eindig aantal, gelegen zijn. Het kan nu echter voorkomen, dat er op een bijzondere kromme ∞^1 dier gemeenschappelijke puntenparen gelegen zijn.

spondentie vindt HURWITZ een uitdrukking, die behalve de termen a en a' niet *één*, maar nog een zeker aantal (μ) termen bevat. Voor $\mu = 1$ is de correspondentie een waardigheidscorrespondentie en gaat zijn formule in die van CAYLEY over.

Ten slotte zij nog vermeld, dat door BURKHARDT (**156** *Comptes Rendus t.* 126) ook het begrip *gebroken waardigheid* is ingevoerd, waarbij dan de waardigheid door de vergelijking $N = a + a' + 2cg$ gedefinieerd is, welke definitie ook reeds door ZEUTHEN (**153** § III) gegeven is. Verder bewijst BURKHARDT nog, dat het aantal coincidenties in geen geval grooter dan $(a + a')(g + 1)$ zijn kan, zoodat steeds $c \leq \frac{1}{2}(a + a')$ is.

Voor het overige zij naar de in het literatuuroverzicht genoemde oorspronkelijke verhandelingen verwezen. Een algebraïsche behandeling van het correspondentiebeginsel met verscheidene toepassingen vindt men in CLEBSCH—LINDEMANN (**31**, p. 441—474), terwijl men daar (p. 720—753) ook transcendente ontwikkelingen vinden zal. Wat de latere literatuur aangaat zij vooral verwezen naar het overzicht, dat BRILL en NOETHER (**157**) van beide richtingen geven.

---

§ 19. *Discussie der formule van* DE JONQUIÈRES.

DE JONQUIÈRES (**161** *Crelle's Journ. Bd.* 66) heeft een formule opgesteld, die het aantal vlakke krommen van den graad m (C_m) aangeeft, die aan een gegeven vlakke kromme van den graad n (C_n) t vrije aanrakingen (aanrakingen in niet-gegeven punten) resp. van de orde a, b, c, enz. volbrengen en door

$$f = \tfrac{1}{2} m (m + 3) - (a + b + c + \ldots)$$

gegeven punten gaan, waarvan er p op C_n zelf gelegen zijn [1]).

---

[1]) De notaties stemmen niet met die van DE JONQUIÈRES overeen.

Hij onderstelt hierbij C_n in het bezit van δ gewone dubbelpunten, maar zonder keerpunten en hoogere singulariteiten, zoodat het geslacht g van C_n gelijk is aan:

$$g = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta.$$

De Jonquières voert echter in zijn formule niet het geslacht in maar een grootheid $D = (n-1)(n-2) - 2\delta = 2g$. Door Cayley (3 *Phil. Trans. Vol.* 158, *Coll. Papers Vol.* 6, art. 74) is in de formule van de Jonquières het geslacht („deficiency") ingevoerd. Deze formule luidt in den door Cayley daaraan gegeven vorm:

$$(a, b, c, \ldots) = (a+1)(b+1)(c+1)\ldots \left\{ \begin{array}{l} [mn-(a+b+c+\ldots)-p\quad]^t \quad + \\ +[mn-(a+b+c+\ldots)-p-1]^{t-1}(a+b+c+\ldots)[g]^1 \\ +[mn-(a+b+c+\ldots)-p-2]^{t-2}(ab+ac+bc+\ldots)[g]^2 \\ +[mn-(a+b+c+\ldots)-p-3]^{t-3}(abc+abd+bcd+\ldots)[g]^3 \\ + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +[mn-(a+b+c+\ldots)-p-t]^0 \quad (abc\ldots\ldots\ldots)[g]^t \end{array} \right\} . \quad (38)$$

Hierin stelt $(a, b, c, \ldots)$ het gevraagde aantal krommen C_m voor, terwijl

$$[x]^i = x(x-1)(x-2)\ldots(x-i+1)$$

is, zoodat $[x]^1 = x$ en $[x]^0 = 1$ is en $[x]^i = 0$ voor $i > x$.

De formule (38) geeft echter alleen dan het gevraagde aantal krommen aan, als de aanrakingsindices $a, b, c, \ldots$ alle van elkaar verschillen. Zijn er daarentegen onder die getallen α, die onderling gelijk zijn, β andere eveneens onderling gelijk enz., dan moet het opgegeven aantal nog door

$$P = [\alpha]^\alpha [\beta]^\beta \ldots$$

gedeeld worden. Hierin stelt P dus het aantal malen voor, waarop de onderling gelijke der aanrakingsindices onderling gepermuteerd kunnen worden.

Door in plaats van naar de krommen C_m naar de op C_n gelegen

raakpunten te vragen kan men het probleem zoo stellen, dat ook voor het geval, dat niet alle aanrakingsindices onderling verschillen, de vergelijking (38) het aantal oplossingen blijft voorstellen, n.l. als volgt:

Op hoeveel manieren kan men bij t niet-gegeven punten der gegeven kromme C_n de letters $A, B, C, \ldots$ plaatsen, zoodanig dat er door $\frac{1}{2} m (m+3) - (a+b+c+\ldots)$ gegeven punten, waarvan er p op C_n zelf liggen, een kromme van den m^{den} graad mogelijk is, die C_n in A a-voudig aanraakt, in B b-voudig, enz.?

Is nu b.v. $a = b$ en zij $A_1, B_1, C_1, \ldots$ een groep van punten, die aan de vraag voldoen, dan kan men zoowel bij het punt A_1 de letter A en bij het punt B_1 de letter B plaatsen als omgekeerd. Men heeft dus eenzelfde puntengroep tweemaal als een oplossing van de boven gestelde vraag aan te merken, n.l. als $A_1, B_1, C_1, \ldots$ en als $B_1, A_1, C_1, \ldots$

Bij de in de volgende paragrafen te geven afleiding zullen we echter gemakshalve onderstellen, dat alle aanrakingsindices onderling verschillen. Is dit niet het geval, dan blijkt die afleiding toch onveranderd door te gaan, als we naar de op C_n gelegen puntengroepen en niet naar de krommen C_m vragen en het probleem dan stellen zooals we het boven geformuleerd hebben. Men heeft dan, om het aantal gevraagde krommen te verkrijgen, slechts achteraf het gevonden aantal puntengroepen door P te deelen.

De Jonquières beschouwt alleen het geval, dat van de f *gegeven punten* er p in gewone punten van C_n vallen, met inbegrip van het geval, dat die p gegeven punten geheel of bij groepen door verschuiving langs C_n zijn samengevallen, hetgeen dan een of meer aanrakingen aan C_n van voorgeschreven orden in gegeven punten beteekent. Zooals gemakkelijk blijkt gaat evenwel de afleiding, die de Jonquières geeft, onveranderd door als dit samenvallen niet uitsluitend door verschuiving langs C_n plaats vindt en ook als er gegeven punten in dubbelpunten van C_n vallen, waarbij er weer meerdere gegeven punten in eenzelfde dubbelpunt al of niet

door verschuiving langs C_n kunnen samenvallen. *In al deze gevallen is de vergelijking* (38) *juist, mits men onder p niet versta het aantal op C_n gelegen gegeven punten, maar het aantal vaste snijpunten van C_m en C_n.* Onder de *vaste snijpunten* van C_m en C_n verstaan we die snijpunten, die voor alle door de gegeven punten gaande krommen C_m dezelfde zijn, dus het aantal snijpunten van C_n met een willekeurige door de gegeven punten gaande kromme C_m, die in de *vaste punten* [1]) van het stelsel der door de gegeven punten gaande krommen C_m vallen.

Lichten we dit door enkele voorbeelden toe. Vallen twee gegeven punten in een gewoon punt van C_n zoodanig samen, dat de limiet hunner verbindingslijn geen raaklijn aan C_n is (dus niet door verschuiving langs C_n), dan beteekent dit, dat C_m door een gegeven punt van C_n gaan moet en daar een gegeven raaklijn heeft, die echter van de raaklijn aan C_n verschilt; in dit geval vallen er *twee* gegeven punten op C_n samen, hetgeen echter slechs voor *één* vast snijpunt telt. Vallen drie gegeven punten in een gewoon punt van C_n samen, dan is in dat punt raaklijn en kromming van C_m gegeven; wanneer nu de raaklijn wel maar de kromming niet met die van C_n overeenstemt, dan heeft men *drie* op C_n gelegen gegeven punten, die voor *twee* vaste snijpunten tellen. Valt *één* enkel gegeven punt in een dubbelpunt van C_n, dan vertegenwoordigt dit *twee* vaste snijpunten. Vallen er *twee* gegeven punten in een dubbelpunt samen, dan geeft dit *twee* vaste snijpunten als de verbindingslijn dier gegeven punten van beide dubbelpuntsraaklijnen verschilt en *drie* vaste snijpunten als die verbindingslijn met een der dubbelpuntsraaklijnen samenvalt. Men ziet gemakkelijk hoe deze voorbeelden te vermeerderen zijn.

---

[1]) Deze *vaste punten* behoeven niet beperkt te zijn tot de gegeven punten, daar de mogelijkheid bestaat, dat alle door de gegeven punten gaande krommen C_m nog door eenige andere vaste punten gaan. Dit geval doet zich b.v. voor als het aantal gegeven punten $\frac{1}{2}\, m\,(m+3) - 1$ bedraagt en $m > 2$ is.

Aan den anderen kant is echter de formule, die DE JONQUIÈRES geeft, quasi algemeener dan de vergelijking (38), doordat DE JONQUIÈRES de voorwaarde van het gaan door de $q = f - p$ niet op C_n gelegen gegeven punten vervangt door een q-voudige algebraïsche voorwaarde, die *onafhankelijk* is van de gegeven kromme. Zij μ het aantal krommen C_m, die aan die q-voudige voorwaarde voldoen en door $\frac{1}{2} m (m + 3) - q$ gegeven punten gaan, dan moet de in vergelijking (38) gegeven uitdrukking voor $(a, b, c, \ldots)$ nog slechts met den factor μ vermenigvuldigd worden. Dat dit zoo is ziet men het gemakkelijkst in door de krommen C_m voor te stellen door parametrische punten in een $\omega = \frac{1}{2} m (m + 3)$-dimensionale ruimte (zie Hoofdstuk I). De $\omega - q$-voudige voorwaarde, dat C_m aan de gegeven kromme de voorgeschreven aanrakingen vertoont en door de op C_n gelegen gegeven punten gaat, is voldaan als het parametrische punt P op een meetkundige plaats $G^{(q)}$ gelegen is; zij deze van den graad N. De q-voudige aan C_n vreemde voorwaarde is voldaan als P op een meetkundige plaats $G^{(\omega - q)}$ ligt; deze is van den graad μ [1]). Beide meetkundige plaatsen doorsnijden elkaar *in het algemeen*, volgens een puntenstelsel, dat dan van den graad μN is, d. w. z. μN punten bevat. Er zijn dus μN krommen, die aan de q-voudige algebraïsche voorwaarde en tegelijkertijd aan de $\omega - q$-voudige aanrakingsvoorwaarde voldoen, terwijl er N krommen zijn, die aan de $\omega - q$-voudige aanrakingsvoorwaarde voldoen en door q willekeurig gegeven punten gaan.

De moeilijkheid, die zich hier voordoet, ligt hierin wat men onder „*in het algemeen*" te verstaan heeft, dus wanneer de q-voudige voorwaarde van de gegeven kromme voldoende onafhankelijk is. Het kan n.l. gebeuren, dat de beide meetkundige plaatsen $G^{(q)}$ en $G^{(\omega - q)}$ een doorsnede van meer dan nul dimensies hebben en bovendien nog een gemeenschappelijk puntenstelsel (door-

---

[1]) Immers bij de voorwaarde door $\omega - q$ gegeven punten te gaan behoort een lineaire meetkundige plaats.

snijdingsresidu, zie § 1); het aantal dier punten ondergaat dan een reductie. Dit geval kan zich voordoen ook al zijn schijnbaar de beide voorwaarden geheel van elkaar onafhankelijk; is b.v. C_m een kegelsnede, dan gaan (zooals we in § 3 gezien hebben) de meetkundige plaatsen behoorend bij de aanrakingsvoorwaarden van twee willekeurig ten opzichte van elkaar gelegen gegeven krommen toch beide door het *puntenpaar-oppervlak* [1]. Ik heb daarom de in het midden gelaten q-voudige algebraïsche voorwaarde door de concrete voorwaarde van het gaan door q gegeven punten vervangen, hetgeen CAYLEY (3) bij zijn beschouwingen ook doet.

---

§ 20. *Bewijs van de formule van* DE JONQUIÈRES *voor een algemeene rationale* C_n.

Is de gegeven kromme rationaal, dan is $g=0$ en luidt dus de formule, die bewezen moet worden:

$$(a,b,c,\ldots)=(a+1)(b+1)(c+1)\ldots[mn-(a+b+c+\ldots)-p]^t. \quad (39)$$

We noemen een aanrakingsprobleem met t_1 voorgeschreven vrije aanrakingen resp. van de orden $a_1, b_1, c_1, \ldots$ lager dan een probleem met t aanrakingen resp. van de orden $a, b, c, \ldots$, als òf $t_1 < t$ is, òf $t_1 = t$ maar $a_1 \leq a$, $b_1 \leq b$, $c_1 \leq c, \ldots$, waarin minstens éénmaal het teeken $<$ genomen moet worden. We onderstellen nu met DE JONQUIÈRES, dat voor alle lagere aanrakingsproblemen de formule reeds bewezen is, en willen de juistheid dier formule dan ook voor $(a, b, c, \ldots)$ aantoonen. We schrijven hiervoor in het volgende $(a, b, c, \ldots)_p$ om het aantal vaste snijpunten van C_m en C_n aan te geven.

---

[1]) De gedeeltelijke afhankelijkheid der voorwaarden zit dan reeds daarin, dat het beide *aanrakingsvoorwaarden* zijn.

Door een willekeurig punt Q van C_n en de $a-1$ volgende punten kunnen $(b, c, \ldots)_{p+a}$ krommen C_m gebracht worden, die C_n in $t-1$ niet-gegeven punten resp. b-, c-, enz.-voudig aanraken en door de gegeven (gedeeltelijk op, gedeeltelijk buiten C_n gelegen) punten gaan. Ieder dier krommen snijdt C_n behalve in de contactpunten (Q medegerekend) en de p vaste snijpunten nog in $mn-(a+b+c+\ldots)-p-t+1$ punten Q', zoodat met ieder punt Q

$$A' = \{mn - (a + b + c + \ldots) - p - t + 1\}(b, c, \ldots)_{p+a}$$

punten Q' correspondeeren.

Omgekeerd vindt men uit Q' het punt Q terug door de $(a-1, b, c, \ldots)_{p+1}$ krommen C_m aan te brengen, die door Q' en de gegeven punten gaan en C_n in t punten resp. $a-1$-, b-, c-, enz.-voudig aanraken; het punt Q is dan het punt van $a-1$-voudige aanraking. Met Q' correspondeeren dus

$$A = (a - 1, b, c, \ldots)_{p+1}$$

punten Q.

Men heeft dus op C_n een (A, A') correspondentie en dus volgens het CHASLES'sche correspondentiebeginsel voor rationale krommen $A + A'$ coincidenties. Deze coincidenties leveren de $(a, b, c, \ldots)_p$ krommen C_m op, die aan C_n t vrije aanrakingen resp. van de orden $a, b, c, \ldots$ vertoonen. Men vindt zoo dus:

$$(a, b, c, \ldots)_p = A + A'.$$

Daar we de juistheid van vergelijking (39) voor lagere aanrakingsproblemen hebben aangenomen, is

$$(b, c, \ldots)_{p+a} = (b + 1)(c + 1) \ldots . [mn - (a + b + c + \ldots) - p]^{t-1},$$

dus

$$A' = (b + 1)(c + 1) \ldots . [mn - (a + b + c + \ldots) - p]^t$$

en

$$A = a(b + 1)(c + 1) \ldots . [mn - (a + b + c + \ldots) - p]^t,$$

waaruit door optelling volgt:

$$(a,b,c,\ldots)_p = (a+1)(b+1)(c+1)\ldots.[mn-(a+b+c+\ldots)-p]^t,$$

in overeenstemming met vergelijking (39).

Op deze wijze kan dus, als de juistheid der formule (39) voor een bepaald geval bekend is, de *orde* van ieder der aanrakingen willekeurig vergroot worden. De Jonquières bewijst nu door nog eens het correspondentiebeginsel toe te passen, dat ook het *aantal* der vrije aanrakingen vergroot kan worden. Dit gedeelte van zijn bewijs kan echter als volgt bekort worden door invoering van nul-voudige aanrakingen, d. w. z. gewone doorsnijdingen [1]).

We beschouwen de formule als bewezen voor $t-1$ aanrakingen resp. van de orden $b, c, \ldots.$ Voegt men nu de nul-voudige voorwaarde van nul-voudige aanraking aan C_n toe, dan verandert het aantal oplossingen niet als men op de krommen C_m, maar wel als men (hetgeen we blijkens de bewijsvoering steeds doen) op de groepen der contactpunten let. De krommen C_m en C_n snijden elkaar n.l. in $mn-(b+c+\ldots)-p-t+1$ buiten de b-, c-, enz.-voudige contactpunten en buiten de gegeven punten gelegen punten, waarvan men ieder op zijn beurt als het nul-voudige contactpunt kan beschouwen. Door toevoeging dier nul-voudige voorwaarde wordt dus het aantal gevraagde *puntengroepen* met $mn-(b+c+\ldots)-p-t+1$ vermenigvuldigd, waaruit volgt:

$$(0,b,c,\ldots)_p = \{mn-(b+c+\ldots)-p-t+1\}(b,c,\ldots)_p.$$

Neemt men nu aan, dat de formule (39) voor $(b,c,\ldots)_p$ reeds bewezen is, dan vindt men:

$$(0,b,c,\ldots)_p = (0+1)(b+1)(c+1)\ldots[mn-(0+b+c+\ldots)-p]^t,$$

eveneens met vergelijking (39) in overeenstemming.

---

[1]) Dat de formule van de Jonquières ook voor nul-voudige aanrakingen geldig blijft is ook door Cayley (**162** *Comptes Rendus t.* 63) opgemerkt, zonder echter daarvan voor de afleiding der formule gebruik te maken.

Is nu eenmaal de formule voor $(0, b, c, \ldots)_p$ bewezen, dan kan ze met behulp der voorafgaande beschouwingen (die onveranderd doorgaan als $a = 1$ is) worden uitgebreid tot $(1, b, c, \ldots)_p$, enz.

Nu moet nog slechts de juistheid van het punt van uitgang worden aangetoond, dus dat de formule in het eenvoudigste geval juist is. Dit is het geval $t = 1$, $a = 0$ [1]). De aanrakingsvoorwaarde is nu nul-voudig, zoodat de kromme C_m reeds door de $\frac{1}{2} m (m + 3)$ gegeven punten bepaald is, en wel ondubbelzinnig. Deze C_m snijdt C_n in $mn - p$ buiten de gegeven punten gelegen punten, waarvan ieder als het nul-voudige contactpunt beschouwd kan worden. Derhalve is het aantal gevraagde puntengroepen $mn - p$, dus:

$$(0) = [mn - p]^1,$$

in overeenstemming met vergelijking (39). Hiermede is het verlangde bewijs volledig geleverd.

---

§ 21. *Bewijs van de formule van* DE JONQUIÈRES *voor een niet-rationale C_n met gewone dubbelpunten.*

In de vorige paragraaf is de juistheid der formule van DE JONQUIÈRES aangetoond voor een kromme C_n, waarvan de coördinaten der punten rationaal in een parameter λ kunnen worden uitgedrukt. Een C_n die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gewone dubbelpunten bezit is echter een rationale kromme, zooals door CLEBSCH (**165** *Crelle's Journ. Bd.* 64) is aangetoond [2]). Zulk een kromme onderscheidt zich van een kromme met δ gewone dubbelpunten, dus van een kromme van het

---

[1]) DE JONQUIÈRES neemt minder eenvoudig als punt van uitgang het geval $t = 1$, $a = 1$ (l. c. § VII).

[2]) Een bewijs hiervoor vindt men ook in SALMON—FIEDLER. *Höh. Kurven* art. 44.

geslacht $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$, door de meerdere aanwezigheid van g dubbelpunten. Is $(a, b, c, \ldots)$ het gezochte aantal voor een algemeene kromme C_n van het geslacht g [1]) en $(a, b, c, \ldots)'$ dit aantal voor een algemeene rationale kromme C'_n, dan wordt het verschil tusschen die aantallen door de g meerdere dubbelpunten der rationale kromme veroorzaakt. Bepaalt men dus het aantal R der krommen C_m, die aan C'_n een of meer der voorgeschreven aanrakingen in die g dubbelpunten uitvoeren, dan is

$$(a, b, c, \ldots) = (a, b, c, \ldots)' + R,$$

dus volgens vergelijking (39):

$$(a, b, c, \ldots) = (a+1)(b+1)\ldots[mn - (a+b+\ldots) - p]^t + R.$$

Het komt er dus slechts op aan R te bepalen. Het is duidelijk, dat de g dubbelpunten, waardoor R veroorzaakt wordt, *buiten* de gegeven punten vallend gedacht kunnen worden [2]). Beschouwen we nu een C_m door een dier g dubbelpunten, die aan een der door dat dubbelpunt gaande takken van C'_n een $a-1$-voudige aanraking vertoont en aan de overige voorwaarden op eigenlijke wijze voldoet, dan snijdt deze C_m de kromme C'_n in $a+1$ in het dubbelpunt vallende punten en voert daar dus een oneigenlijke a-voudige aanraking uit. Daar nu de C_m aan C'_n $t-1$ vrije aanrakingen uitvoert en C'_n in $p+a+1$ in de gegeven punten (waartoe nu ook dit dubbelpunt moet gerekend worden) vallende punten snijdt, is het aantal dier krommen C_m voor ieder der beide takken door ieder dier g dubbelpunten gelijk aan $(b, c, \ldots)'_{p+a+1}$ (waarbij het

---

[1]) D. w. z. algemeen in haar geslacht uit het oogpunt van punt-coördinaten.

[2]) Immers bij de kromme C_n van het geslacht g, waarvoor we de formule van DE JONQUIÈRES willen bewijzen, ontbreken juist die g dubbelpunten. Het aantal R is het aantal oplossingen, die ontstaan als men g dubbelpunten der rationale kromme laat verdwijnen.

accent weer aangeeft, dat de gegeven kromme rationaal en de vergelijking (39) dus van toepassing is), dus aan

$$(b+1)(c+1)\ldots[mn-(a+b+c+\ldots)-p-1]^{t-1},$$

welk aantal voor de g dubbelpunten te zamen met $2g$ vermenigvuldigd moet worden.

Ieder dier krommen C_m moet echter met een zekere multipliciteit in rekening gebracht worden. Om die multipliciteit te bepalen past DE JONQUIÈRES de vergelijking (39) achtereenvolgens toe op een rechte en op een kegelsnede (beide rationale krommen) als gegeven kromme, en wel (daar de overige aanrakingen toch eigenlijk worden uitgevoerd en de eenige oorzaak voor de multipliciteit in de in het dubbelpunt uitgevoerde oneigenlijke a-voudige aanraking gelegen is) voor het geval $t=1$. Door de zoo verkregen aantallen oplossingen voor een niet en voor een wel gedegenereerde kegelsnede met elkaar te vergelijken vindt DE JONQUIÈRES, dat bij een uit twee rechten bestaande kegelsnede het aantal eigenlijke oplossingen door de aanwezigheid van het dubbelpunt met $a(a+1)$ verminderd is. Hieruit leidt DE JONQUIÈRES ook voor het geval, dat t willekeurig is en men met een dubbelpunt eener kromme van hoogeren graad te doen heeft, af:

I. *Een C_m, die in een dubbelpunt van C_n aan een der beide door het dubbelpunt gaande takken een $a-1$-voudige aanraking vertoont en aan de overige voorwaarden eigenlijk voldoet, telt voor $\frac{1}{2}a(a+1)$ oneigenlijke oplossingen.*

DE JONQUIÈRES' afleiding van dezen regel heeft echter het bezwaar, dat het niet steeds mogelijk is voor de gegeven kromme een rechte of een kegelsnede te kiezen (zie § 24). Bij de vraag naar de buigraaklijnen ($m=1$, $t=1$, $a=2$) b. v. verliest de formule (39) haar geldigheid, als we voor de gegeven kromme een rechte kiezen.

Men kan deze moeilijkheid op de volgende wijze ontgaan. Zij x de in bovenstaanden regel genoemde multipliciteit. Het ligt nu voor de hand aan te nemen, dat x alleen van den aard

van het aanrakingsprobleem maar niet van de gegeven kromme afhangt. Daar we, zooals boven uiteen gezet is, $t = 1$ kunnen stellen, zal dus x van a en mogelijk ook van m, maar niet van n afhangen [1]). De C_m is nu door de voorwaarde door de gegeven punten te gaan en in een bepaald aangewezen dubbelpunt van C_n een aangewezen tak door het dubbelpunt $a-1$-voudig aan te raken ondubbelzinnig bepaald. Bij een rationale C_n met $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dubbelpunten heeft men dus $(n-1)(n-2)$ dergelijke krommen C_m, aan alle waarvan dezelfde multipliciteit x toekomt. Liggen de gegeven punten geheel willekeurig ($p = 0$), dan heeft men volgens de vergelijking (39) bij een rationale C_n $(a+1)(mn-a)$ eigenlijke oplossingen en volgens het voorgaande $x(n-1)(n-2)$ oneigenlijke oplossingen. Bij een punt-algemeene C_n is dus bij willekeurige ligging der gegeven punten het aantal eigenlijke oplossingen gelijk aan

$$\begin{aligned} N_n &= (a+1)(mn-a) + x(n-1)(n-2) \\ &= An^2 + Bn + C, \end{aligned}$$

waarin

$$\begin{aligned} A &= x \quad , \\ B &= (a+1)m - 3x \quad , \\ C &= -a(a+1) + 2x \end{aligned}$$

is. Bestaat C_n nu uit twee punt-algemeene willekeurig ten opzichte van elkaar gelegen krommen C_{n_1} en C_{n_2} $(n_1 + n_2 = n)$, dan heeft C_n $n_1 n_2$ gewone dubbelpunten, die het aantal eigenlijke oplossingen met $2x\, n_1 n_2$ verminderen. Dit aantal bedraagt dus $N_{n_1+n_2} - 2x\, n_1 n_2$ maar ook $N_{n_1} + N_{n_2}$, zoodat men vindt:

$$A(n_1+n_2)^2 + B(n_1+n_2) + C - 2x\, n_1 n_2 = An_1^2 + Bn_1 + C + An_2^2 + Bn_2 + C.$$

---

[1]) Dat x niet van n afhangt wordt ook bij de afleiding van DE JONQUIÈRES stilzwijgend aangenomen.

Aan deze vergelijking moet identiek voldaan zijn voor alle waarden van n_1 en n_2, waaruit volgt:

$$A = x\,,$$
$$C = 0\,.$$

Aan de eerste vergelijking is blijkens de beteekenis van A reeds voldaan, terwijl uit de tweede vergelijking volgt:

$$x = \tfrac{1}{2}\,a\,(a+1)\,,$$

in overeenstemming met regel I.

Uit dezen regel leidt DE JONQUIÈRES voor het geval, dat t een willekeurige waarde heeft en er meerdere vrije aanrakingen op oneigenlijke wijze in dubbelpunten van C_n worden uitgevoerd, als van zelf sprekende gevolgtrekking af:

II. *Een C_m, die door twee dubbelpunten van C_n gaat en in ieder dubbelpunt aan een der takken van C_n een $a-1$- resp. $b-1$-voudige aanraking vertoont en aan de overige voorwaarden eigenlijk voldoet, telt voor $^1/_4\,a\,(a+1)\,b\,(b+1)$ oneigenlijke oplossingen. Enz.*

Opgemerkt zij nog, dat voor $a > 1$ òf de eene òf de andere tak van C_n door het dubbelpunt $a-1$-voudig kan worden aangeraakt. Is echter $a = 1$, dan vertoont een C_m, die door dat dubbelpunt gaat, zoowel aan den eenen als aan den anderen tak een $a-1 = 0$-voudige aanraking. Voldoet deze C_m aan de overige voorwaarden eigenlijk, dan moet ze tweemaal in rekening worden gebracht (als 0-voudig rakend aan den eenen en als 0-voudig rakend aan den anderen tak) en wel beide keeren $\tfrac{1}{2}\,a\,(a+1) = 1$ maal geteld. In dat geval vallen dus de beide $\tfrac{1}{2}\,a\,(a+1)$ maal tellende oplossingen samen.

Men kan nu gemakkelijk aftellen hoeveel krommen C_m er zijn, die één of twee of drie enz. der vrije aanrakingen op oneigenlijke wijze in één of twee of drie enz. der g meerdere dubbelpunten der rationale C'_n uitvoeren, en ieder dier krommen met de door bovenstaande regels aangegeven multipliciteit in rekening brengen.

Men ziet zoo term voor term der formule (38) van DE JONQUIÈRES voor den dag komen. De tweede term ontstaat n.l. uit de krommen C_m, die één der aanrakingen oneigenlijk (d. w. z. in een dubbelpunt van C'_n) volbrengen; de derde term uit de krommen met twee oneigenlijke aanrakingen, enz.

---

§ 22. *Multipliciteit der oneigenlijke oplossingen.*

Zooals uit de afleiding der formule van DE JONQUIÈRES blijkt zijn onder de $(a, b, c, \ldots)_p$ oplossingen niet medegeteld die krommen C_m, die b.v. een a-voudige aanraking in een op C_n gelegen gegeven punt uitvoeren [1]). Het is duidelijk dat de $(b, c, \ldots)_{p+a}$ krommen C_m, die in dat gegeven punt de a-voudige aanraking uitvoeren en aan de overige voorwaarden eigenlijk voldoen wel als oplossingen maar dan als *oneigenlijke* oplossingen moeten beschouwd worden, waarvan de multipliciteit gemakkelijk te bepalen is.

Daartoe nemen we het eenvoudigste geval, n.l. $t = 1$. Dan is volgens vergelijking (38):

$$(a) = (a + 1)\{mn + a(g - 1) - p\} \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Het blijkt dus dat het aantal eigenlijke oplossingen door ieder der p op C_n gelegen gegeven punten met $a + 1$ vermindert [2]). Hieruit leiden we, ook voor het geval dat het aantal vrije aanrakingen grooter dan één is, af:

I. *Een C_m, die de a-voudige vrije aanraking in een op C_n gelegen gegeven punt uitvoert en aan de overige voorwaarden eigenlijk voldoet, telt voor $a + 1$ oneigenlijke oplossingen.*

---

[1]) Tenminste als er in dat punt slechts $a + 1$ snijpunten samenvallen.

[2]) M. a. w. er zullen $a + 1$ eigenlijke oplossingen samenvallen en oneigenlijk worden als een gegeven punt tot C_n nadert.

Heeft men den invloed der dubbelpunten op het aantal eigenlijke oplossingen reeds in rekening gebracht en laat men nu een gegeven punt tot een dubbelpunt van C_n naderen, dan ontstaan er evenveel oneigenlijke oplossingen als wanneer er twee gegeven punten tot C_n naderden. Men heeft nu n.l. oneigenlijke oplossingen, die den eenen tak, en die welke den anderen tak door dat dubbelpunt a-voudig aanraken.

Uit den boven gegeven regel kan men gemakkelijk regels afleiden voor de multipliciteit der oneigenlijke oplossingen, die twee of meer der voorgeschreven aanrakingen in op C_n gelegen gegeven punten uitvoeren. Men vindt zoo:

II. *Een C_m, die twee vrije aanrakingen van de orden a en b in gegeven punten uitvoert en aan de overige voorwaarden eigenlijk voldoet, telt voor $(a+1)(b+1)$ oneigenlijke oplossingen. Enz.*

Men kan dezen regel voor het geval van twee voorgeschreven aanrakingen ($t=2$) gemakkelijk controleeren. Dan is n.l. volgens vergelijking (38):

$$\begin{aligned}(a, b) = (a+1)(b+1)\{&[mn-(a+b)]^2 + \\ &+ [mn-(a+b)-1]^1 (a+b)[g]^1 + ab[g]^2\} - \\ &- p(a+1)(b+1)(mn+b(g-1)-p-a) - \\ &- p(a+1)(b+1)(mn+a(g-1)-p-b) - \\ &- p(p-1)(a+1)(b+1).\end{aligned}$$

Hierin is $p(b+1)(mn+b(g-1)-p-a)$ het aantal krommen C_m, die de a-voudige aanraking in een der op C_n gelegen gegeven punten uitvoeren, waarvan ieder $a+1$ maal geteld moet worden. De volgende term heeft een analoge beteekenis, terwijl er verder nog $p(p-1)$ krommen C_m zijn, die beide aanrakingen in op C_n gelegen gegeven punten uitvoeren, waaraan dus blijkens bovenstaande vergelijking een multipliciteit $(a+1)(b+1)$ toekomt, in overeenstemming met den gegeven regel.

Men kan deze regels natuurlijk ook combineeren met die van § 21 en vindt zoo b.v.:

III. *Een C_m, die de C_n in een gegeven punt a-voudig aanraakt en door een buiten de gegeven punten gelegen dubbelpunt van C_n gaat en daar een der takken door het dubbelpunt $b-1$-voudig aanraakt en aan de overige voorwaarden eigenlijk voldoet, telt voor $(a+1).\frac{1}{2}b(b+1)$ oneigenlijke oplossingen.*

---

§ 23. *Gevallen, waarin het aanrakingsprobleem geen oplossingen toelaat.*

Het is duidelijk, dat het aantal oplossingen *nul* moet zijn als het aanrakingsprobleem verlangt, dat het aantal snijpunten der krommen C_m en C_n meer dan mn bedraagt. Daar er $(a+1)+$ $+(b+1)+(c+1)+\ldots=(a+b+c+\ldots)+t$ snijpunten in de contactpunten vallen en p snijpunten in de gegeven punten, laat de gestelde vraag geen oplossingen toe als

$$(a+b+c+\ldots)+p+t>mn \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

is. Is echter

$$(a+b+c+\ldots)+p+t\leq mn\,, \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

dus $mn-(a+b+c+\ldots)-p-t+1>0$, dan blijkt dat geen der termen van formule (38) negatief of nul wordt. Men vindt dus:

I. *Verlangt het aanrakingsprobleem niet meer snijpunten van C_m en C_n dan mn, dan levert de formule van* DE JONQUIÈRES *voor $(a, b, c, \ldots)$ een van nul verschillende positieve waarde.*

Is daarentegen aan de ongelijkheid (α) voldaan en is tevens

$$mn-(a+b+c+\ldots)-p-g\geq 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

(hetgeen natuurlijk alleen dan met (γ) overeen te brengen is als $g<t$ is), dan zijn de termen van het tweede lid van vergelijking (38) alle *nul* en is dus ook $(a, b, c, \ldots)=0$. Om na te gaan wanneer dit geval zich voor doet nemen we eenvoudigheidshalve aan, dat geen der gegeven punten in een dubbelpunt van C_n valt. Stelt

dan weer q het aantal buiten C_n gelegen gegeven punten voor, dan is:

$$(a + b + c + \ldots) + p + q = \tfrac{1}{2} m (m + 3), \quad . \quad (42)$$

waardoor de ongelijkheden (α) en (β) overgaan in

$$\tfrac{1}{2} m (m + 3 - 2n) > q - t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)'$$

en

$$\tfrac{1}{2} m (m + 3 - 2n) \leq q - g.$$

Daar $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$ is volgt uit de laatste ongelijkheid:

$$\tfrac{1}{2} (m - n)(m - n + 3) \leq q - 1 + \delta,$$

of:

$$\tfrac{1}{2} (m - n)(m - n + 3) < q + \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)'$$

Is aan (α)' voldaan en is tevens $m < n$, dan wordt van zelf aan (β)' voldaan [1]). Men vindt dus:

II. *Verlangt het aanrakingsprobleem meer snijpunten van C_m en C_n dan mn, en is òf $m < n$ òf $m = n$ en $q + \delta > 0$ òf $m > n$ zonder dat er een kromme van den graad $m - n$ mogelijk is door de q buiten C_n gelegen gegeven punten* [2]) *en de δ dubbelpunten van C_n, dan levert de formule van* DE JONQUIÈRES *voor $(a, b, c, \ldots)$ de waarde nul op.*

Hiermede is echter niet gezegd dat dit de eenige gevallen zijn, waarin deze formule voor $(a, b, c, \ldots)$ nul oplevert.

Is aan de ongelijkheid (α) voldaan, dus stelt het aanrakingsprobleem een onmogelijken eisch, dan kan het toch nog gebeuren, dat er (hoewel oneigenlijke) oplossingen zijn; zulk een oplossing

---

[1]) Immers, daar noodzakelijk $t \leq \frac{1}{2} m (m + 3)$ is, volgt uit (α)' dat $m (m - n + 3) > q$ en dus $m - n + 3$ positief is. Is nu $m - n$ negatief, dan is het eerste lid van (β)' negatief en aan die ongelijkheid dus voldaan.

[2]) We onderstellen de ligging der buiten C_n gelegen gegeven punten hierbij *totaal* willekeurig, zoodat al die bijzonderheden buiten beschouwing blijven, die het gevolg zijn van een bijzondere ligging dier gegeven punten.

zal de gegeven kromme moeten bevatten of daar geheel uit bestaan. Dit is natuurlijk alleen dan mogelijk, als $m \geq n$ is en er bovendien geen gegeven punten buiten C_n liggen of door de buiten C_n gelegen gegeven punten [1]) geen kromme van den graad $m-n$ mogelijk is. Doet dit geval zich niet voor, dan noemen we het aanrakingsprobleem *absoluut onmogelijk*. Uit II volgt dan:

III. *Bij een absoluut onmogelijk aanrakingsprobleem levert de formule van* DE JONQUIÈRES *steeds n u l oplossingen en behoudt dus voor dat geval haar geldigheid.*

Is echter wel aan de ongelijkheid (α) voldaan zonder dat het aanrakingsprobleem absoluut onmogelijk is, in welk geval we het probleem *relatief onmogelijk* noemen (dewijl er slechts op een geheel bijzondere buiten de eigenlijke bedoeling vallende wijze aan kan worden voldaan), dan wordt het probleem onbepaald als we het (zooals steeds) opvatten als de vraag naar de groepen van raakpunten. De formule van DE JONQUIÈRES verliest dan haar beteekenis en kan zoowel een positieve of een negatieve waarde als een waarde nul opleveren. Van ieder dier gevallen geven we een voorbeeld.

Gegeven een kubische kromme met dubbelpunt ($n=3, g=0$). Gevraagd het aantal kubische krommen, die de gegeven kromme 9-voudig aanraken ($m=3$, $p=0$, $t=1$, $a=9$). Hieraan voldoet blijkbaar alleen de gegeven kromme zelf. De formule van DE JONQUIÈRES levert $(9)=0$.

Gegeven een rechte ($n=1, g=0$). Gevraagd het aantal kegelsneden door twee buiten die rechte gelegen punten, die aan de gegeven rechte twee vrije aanrakingen van de orden één en twee vertoonen ($m=2, p=0, t=2, a=1, b=2$). Hieraan voldoet alleen de kegelsnede, die gedegeneerd is in de gegeven rechte en de verbindingslijn der gegeven punten. De formule levert $(1,2)=12$.

Gevraagd het aantal buigpunten van een rechte ($n=m=1$, $g=0, p=0, t=1, a=2$). De formule levert $(2)=-3$.

---

[1]) Zie noot 2 pag. 140.

Hieruit blijkt dus:

IV. *Voor een relatief onmogelijk aanrakingsprobleem verliest de formule van* DE JONQUIÈRES *haar beteekenis.*

---

§ 24. *Beperkte geldigheid der formule van* DE JONQUIÈRES.

In het volgende onderstellen we, dat steeds aan de ongelijkheid (41) voldaan is, daar anders het aanrakingsprobleem een relatief of absoluut onmogelijken eisch stelt. In de vorige paragraaf is ons gebleken, dat de formule van DE JONQUIÈRES in dat geval voor $(a, b, c, \ldots)$ een positieve van nul verschillende waarde oplevert. Het is echter niet zeker, dat deze waarde tevens het aantal *eigenlijke* oplossingen voorstelt, ook dan niet als we (hetgeen we steeds doen) de ligging der gegeven punten als *willekeurig* beschouwen. Behalve de oneigenlijke oplossingen, die reeds uit de formule van DE JONQUIÈRES verwijderd zijn, kunnen er nog andere oneigenlijke oplossingen optreden, waarmede bij de afleiding dier formule geen rekening gehouden is. Deze nieuwe oneigenlijke oplossingen zijn nog van tweeërlei soort:

1°. Een C_m, die geheel of gedeeltelijk uit C_n zelf bestaat;

2°. Een C_m, die een meermalen tellenden tak bevat of daar geheel uit bestaat.

Oneigenlijke oplossingen der eerste soort. Wil C_m (als deel of als geheel) de kromme C_n bevatten, dan moet $m \geq n$ zijn. Dan zijn daardoor reeds alle aanrakingsvoorwaarden voldaan benevens de voorwaarde van het gaan door de op C_n gelegen gegeven punten. De overblijvende C_{m-n} behoeft nu alleen nog maar door de q niet op C_n gelegen gegeven punten te gaan. Daar we de ligging dier gegeven punten willekeurig denken [1]), is dit alleen mogelijk als

[1]) We nemen dus b.v. aan, dat er geen drie gegeven punten op een rechte of zes gegeven punten op een kegelsnede liggen, enz.

$$q \leq \tfrac{1}{2}(m-n)(m-n+3)$$

is. Is hieraan voldaan, dan leidt men er in verband met de ongelijkheid (41) uit af:

$$(a+b+c+\ldots)+p+q+t \leq \tfrac{1}{2}m(m+3)+\tfrac{1}{2}n(n-3).$$

Nemen we evenals in de vorige paragraaf aan, dat de gegeven punten niet in dubbelpunten van C_n vallen en aan de vergelijking (42) dus voldaan is, dan volgt daaruit:

$$n(n-3) \geq 2t \text{ [1]}.$$

Alleen als aan deze ongelijkheid voldaan is kan de besproken bijzonderheid zich voordoen. Daarvoor moet dus n minstens *vier* zijn. Als voorbeeld kiezen we de vraag naar de krommen C_5, die een gegeven C_4 18-voudig aanraken en door twee niet op C_4 gelegen gegeven punten gaan ($n=4$, $m=5$, $t=1$, $a=18$, $f=2$, $p=0$; het aanrakingsprobleem verlangt 19 snijpunten, dus minder dan het totale aantal). Aan deze vraag voldoet de C_5, die bestaat uit de C_4 en de verbindingslijn der beide gegeven punten. Kiezen we echter een der beide gegeven punten op de C_4 ($q=1$, $p=1$; ook dan is het probleem nog mogelijk), dan doet zich het geval voor, dat de overblijvende C_{m-n} door de niet op C_n gelegen gegeven punten niet bepaald is, en er dus oneindig veel krommen C_m aan de vraag voldoen.

Onverschillig echter of de C_{m-n} door de gegeven punten al of niet bepaald is (dus of het aantal krommen C_m, die aan de vraag voldoen, eindig of oneindig is), het aantal oplossingen is steeds oneindig als we naar de groepen van contactpunten vragen. Maar niet alleen is het aantal oplossingen oneindig, *iedere groep van t willekeurig op C_n aangenomen punten kan als een groep van contactpunten beschouwd worden.* Deze t punten voldoen n.l. aan den

---

[1]) Deze ontwikkelingen gaan onveranderd door als $m=n$ is.

eisch, dat er door die punten een C_m mogelijk is, die in die punten de voorgeschreven aanrakingen vertoont en door de gegeven punten gaat. We noemen de vraag (d. w. z. de vraag naar de contactpunten) daarom *absoluut onbepaald.*

Er is nu *in het algemeen* geen C_m mogelijk, die aan de vraag voldoet zonder de gegeven C_n te bevatten. Was er n.l. zulk een C_m, dan zouden er door de contactpunten en de gegeven punten minstens twee krommen C_m mogelijk zijn, die de verlangde aanrakingen vertoonen (daar de C_m, die uit C_n en een C_{m-n} bestaat, ook aan de vraag voldoet). Dan was de C_m dus nog niet bepaald door de contactpunten (resp. voor $a+1$, $b+1$, enz. gegeven punten tellend) en de f gegeven punten, d. z. in het geheel

$$(a+b+c+\ldots)+t+f=\tfrac{1}{2}m(m+3)+t$$

gegeven punten. Door die punten zou dan dus een bundel krommen van den graad m mogelijk zijn. Uit $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ basispunten van dien bundel kan echter de ligging der overige basispunten worden afgeleid. Dat de C_m door $\frac{1}{2}m(m+3)+t$ punten nog niet bepaald is bewijst dus dat $t+1$ dier punten behooren onder die basispunten van den bundel, welke uit de $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ overige kunnen worden afgeleid. Dit vordert het vervuld zijn van $2(t+1)$ betrekkingen tusschen de coördinaten dier $\frac{1}{2}m(m+3)+t$ punten. Hoe we de t contactpunten echter ook op C_n aannemen, steeds is er door die $\frac{1}{2}m(m+3)+t$ punten minstens *één* C_m mogelijk [1]), zoodat er reeds aan t dier voorwaarden voldaan is. Willen nu die $\frac{1}{2}m(m+3)+t$ punten zoo liggen, dat ze de basispunten zijn van een bundel van krommen C_m, dan moet er bovendien nog aan $2(t+1)-t=t+2$ voorwaarden voldaan zijn. Daar we evenwel slechts over t op C_n gelegen punten te beschikken hebben is dit *in het algemeen* niet mogelijk.

Zoo is b.v. in het algemeen de eenige C_4, die een gegeven C_4

---

[1]) N.l. de C_m, die geheel of gedeeltelijk uit de C_n bestaat.

14-voudig aanraakt, de gegeven C_4 zelf. In bijzondere gevallen is zulk een 14-voudig aanrakende C_4, die van de gegeven C_4 verschilt, wel mogelijk, b.v. als de gegeven C_4 een *undulatiepunt* [1]) — d. i. een punt met 3-voudig rakende raaklijn — bezit. Dan vallen n.l. de 16 snijpunten met de viermaal tellende undulatieraaklijn alle in het undulatiepunt samen, zoodat alle krommen van den bundel, die bepaald is door de gegeven C_4 en de 4 maal tellende undulatieraaklijn, aan de gegeven C_4 een 15-voudige aanraking (dus een bijzonder soort van 14-voudige aanraking) vertoonen.

Het blijkt dus, dat iedere eigenlijke oplossing deel uitmaakt van een geheelen bundel van eigenlijke oplossingen, zoodat ons resultaat is:

Een mogelijk aanrakingsprobleem, waarvoor

$$m \geq n$$

en

$$q \leq \tfrac{1}{2}(m-n)(m-n+3)$$

is, is absoluut onbepaald. Er zijn dan geen geïsoleerde en in het algemeen geen eigenlijke oplossingen.

Oneigenlijke oplossingen der tweede soort. We onderstellen nu, dat er niet aan de ongelijkheden voldaan is, die het optreden van oneigenlijke oplossingen van de eerste soort mogelijk maken.

De Jonquières, die zich alleen met de oneigenlijke oplossingen der tweede soort bezig houdt, begint met te bewijzen, dat er in het algemeen (d. w. z. bij willekeurige ligging der gegeven punten) geen in enkelvoudige partieelkrommen $C_{m_1}, C_{m_2}, \ldots (m_1 + m_2 + \ldots = m)$ gedegenereerde C_m aan de vraag kan voldoen, zooals onmiddellijk door aftelling van het aantal parameters van een gedegenereerde en van een niet gedegenereerde C_m blijkt.

Anders is het echter als C_m b.v. in een s maal tellende C_{m_1} en een C_{m_2} degenereert ($s\, m_1 + m_2 = m$). Deze C_m vertoont n.l. in alle snijpunten van C_n met C_{m_1} reeds van zelf een $s-1$-voudige oneigen-

[1]) Salmon—Fiedler. *Höh. Kurven*, art. 50, p. 48.

lijke aanraking, en een $s(r+1)-1$-voudige aanraking daar, waar C_n en C_{m_1} een r-voudige aanraking vertoonen. Hierdoor wordt het aantal gegevens [1]), waarmede de aanrakingsvoorwaarden aequivalent zijn, belangrijk beperkt, hetgeen op kan wegen tegen de vermindering, die het aantal parameters van C_m door de onderstelling van degeneratie ondergaat.

De Jonquières (**161** p. 303—306) komt nu tot het resultaat, dat bij iederen degeneratievorm van C_m voor het aantal q der niet op C_n gelegen gegeven punten een grens („limite favorable") is aan te geven boven welke die degeneratievorm niet op kan treden [2]). Is het aantal niet op C_n gelegen gegeven punten zoo groot, dat geen der degeneratievormen van C_m onder de oplossingen kan voorkomen, dan zijn er geen oneigenlijke oplossingen van de tweede soort en is de formule (38) dus juist. Hieruit volgt:

De formule van de Jonquières *geeft het juiste aantal eigenlijke oplossingen aan, als het aantal niet op C_n gelegen gegeven punten boven een zekere grens ligt.*

Ligt het aantal niet op C_n gelegen gegeven punten beneden die grens, dan zijn er oplossingen met meervoudige takken mogelijk. Er kunnen zich nu nog twee gevallen voordoen. Het kan n.l. zijn dat de gedegenereerde C_m door de voorwaarden juist bepaald is of daardoor nog niet geheel bepaald is. In het eerste geval is het aantal oneigenlijke oplossingen eindig, zoodat men slechts de multipliciteit dier oneigenlijke oplossingen heeft te kennen om aan de formule van de Jonquières een *correctie* te kunnen aanbrengen, waardoor ze het aantal eigenlijke oplossingen blijft voorstellen. In het tweede geval daarentegen is het aantal oneigenlijke oplossingen oneindig groot, zoodat de formule van de Jonquières dan niet meer de som van de aantallen eigenlijke en oneigenlijke oplossingen aangeeft. Behalve die continue reeks van oneigen-

---

[1]) Een i-voudige voorwaarde tellen we voor i gegevens.

[2]) Altijd weer als die q gegeven punten willekeurig liggen.

lijke oplossingen zijn er dan nog geïsoleerde eigenlijke oplossingen. De correctie, die aan de formule van DE JONQUIÈRES moet worden aangebracht om het aantal dier laatste te verkrijgen, is nu echter niet rechtstreeks te bepalen, zoodat men naar andere wegen moet omzien om het probleem op te lossen, b.v. de karakteristiekentheorie.

Ten slotte geven we van ieder dier beide gevallen nog een voorbeeld.

Voorbeeld van het eerste geval. Gevraagd het aantal kegelsneden ($m=2$) te bepalen, die aan een punt-algemeene C_n ($g=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$) twee aanrakingen vertoonen, een van de 2de en een van de 3de orde ($t=2$, $a=2$, $b=3$, $p=0$) (DE JONQUIÈRES l. c. p. 308).

De formule levert:

$$(2\,,3) = 6n\,(3n^3 - 8n^2 - 19n + 48)\,.$$

Aan de vraag voldoen echter ook de

$$\tfrac{1}{2}\,n\,(n-2)\,(n^2-9)$$

dubbelraaklijnen als in samenvallende rechten gedegenereerde kegelsneden beschouwd. Zulk een *dubbelrechte* vertoont evenwel twee aanrakingen van de 3de orde, zoodat ieder der beide raakpunten als dat van de 3de orde is op te vatten. Deze gedegenereerde C_2 voldoet dus op twee manieren aan de vraag. Op ieder dier beide manieren komt aan de C_2 een multipliciteit *drie* [1]) toe, die veroorzaakt wordt doordat ze een 3-voudige aanraking uitvoert waar slechts een 2-voudige is voorgeschreven. In het geheel telt de dubbeltellende dubbelraaklijn dus voor *zes* oneigenlijke oplossingen, zoodat de formule van DE JONQUIÈRES een correctie $3n(n-2)(n^2-9)$ behoeft, en de juiste formule dus luidt:

$$(2\,,3) = 3n\,(5n^3 - 14n^2 - 29n + 78)\,,$$

in overeenstemming met de opgave van CAYLEY (79 *Comptes*

[1]) Dat die multipliciteit juist *drie* is denk ik elders aan te toonen.

Rendus t. 63 of 3 *Phil. Trans. Vol.* 158, *Coll. pap. Vol.* 6, art. 50) voor een C_n met dubbel- en keerpunten [1]).

Voorbeeld van het tweede geval. Gevraagd het aantal kegelsneden, die C_n eenmaal 3-voudig en tweemaal enkelvoudig aanraken ($m=2$, $t=3$, $a=3$, $b=c=1$, $p=0$).

Hieraan voldoen oneigenlijk alle raaklijnen van C_n beschouwd als dubbeltellende rechten. De correctie ten gevolge dier oneigenlijke oplossingen is niet rechtstreeks te bepalen. In tegenstelling met het geval, dat er oneigenlijke oplossingen der eerste soort optreden, kan nu echter niet ieder drietal punten van C_n als groep van raakpunten worden beschouwd; een dier raakpunten kan men willekeurig aannemen, maar dan zijn de beide andere (hoewel niet ondubbelzinnig) bepaald [2]).

---

§ 25. *Recursieformules van* Brill.

Op dezelfde wijze als de Jonquières het aanrakingsprobleem voor een rationale gegeven kromme heeft opgelost door toepassing van het Chasles'sche correspondentieprincipe, kan men direct van een gegeven kromme van willekeurig geslacht (echter zonder keerpunten of hoogere singulariteiten) uitgaan en daarop het Cayley—Brill'sche correspondentieprincipe toepassen. Op deze wijze zijn door Brill (146 *Math. Annalen Bd.* 6) twee recursieformules opgesteld — een om $(1, b, c, \ldots)$ en een om $(a, b, c, \ldots)$ te vinden uitgedrukt in $(b, c, \ldots)$ resp. $(a-1, b, c, \ldots)$ en in op nog lagere aanrakingsproblemen betrekking hebbende aantallen—,

---

[1]) Zie vergelijking (33) p. 79.

[2]) Het aantal (3, 1, 1) is voor een C_n met dubbel- en keerpunten langs anderen weg (zie § 12) door Cayley (3 art. 50 a. 60) bepaald. Voor de vergelijking met de formule van de Jonquières zie art. 91.

die BRILL als de eerste en de tweede recursieformule onderscheidt. De eerste dient dus om het *aantal* vrije aanrakingen, de tweede om de *orde* dier aanrakingen te vergrooten. In het volgende geven we weer door een index het aantal vaste snijpunten van C_m en C_n aan.

Evenals in § 20 brengen we door een willekeurig punt Q van C_n en de $a-1$ volgende punten de $(b, c, \ldots)_{p+a}$ krommen C_m aan, die C_n in een (niet gegeven) punt B b-voudig, in C c-voudig enz. aanraken en door de gegeven punten gaan. De correspondentiekromme Θ bestaat nu uit de $(b, c, \ldots)_{p+a}$ krommen C_m, waarvan ieder C_n in a punten Q snijdt. Hieruit volgt, dat de waardigheid der correspondentie gelijk is aan

$$a \,.\, (b, c, \ldots)_{p+a} \,.$$

De correspondentiekromme snijdt C_n in groepen van snijpunten met verschillende multipliciteit, zoodat we met een samengestelde correspondentie (zie § 18) te doen hebben.

Met Q correspondeeren nu $(b, c, \ldots)_{p+a}$ snijpunten B met een multipliciteit $b+1$. Omgekeerd komen met een punt B $(a-1, c, d, \ldots)_{p+b+1}$ punten Q overeen, terwijl er bij een coincidentie van Q met B een $a+b$-voudige aanraking aan C_n in het coincidentiepunt plaats vindt. Het aantal dier coincidenties is dus $(a+b, c, d, \ldots)_p$.

Evenzoo voor de correspondenties (Q, C), (Q, D), enz.

Verder snijdt de correspondentiekromme de kromme C_n nog in

$$\{mn - (a + b + c + \ldots) - p - t + 1\}\,(b, c, \ldots)_{p+a}$$

enkelvoudige snijpunten Q', terwijl met Q' $(a-1, b, c, \ldots)_{p+1}$ punten Q overeenkomen. De coincidenties van Q en Q' leveren de oplossingen van het aanrakingsprobleem en zijn dus ten getale van $(a, b, c, \ldots)_p$ aanwezig.

Men vindt dus door toepassing van het in § 18 besproken correspondentieprincipe voor samengestelde correspondenties:

$$(a, b, c, \ldots)_p = 2ga(b, c, \ldots)_{p+a} + (a-1, b, c, \ldots)_{p+1} + \\ + \{mn - (a+b+c+\ldots) - p - t + 1\}(b, c, \ldots)_{p+a} + \\ + \Sigma(b+1)[-(a+b, c, d, \ldots)_p + (b, c, \ldots)_{p+a} + (a-1, c, d, \ldots)_{p+b+1}].$$

Hierin beteekent het Σ-teeken, dat men de letters $b, c, d, \ldots$ cyclisch moet verwisselen en de daardoor ontstane termen optellen.

Bovenstaande formule is met eenigszins andere notaties de tweede recursieformule van Brill. Door analoge beschouwingen vindt Brill zijn eerste recursieformule. Deze formule kan echter eenvoudiger uit de andere worden afgeleid door $a = 1$ te stellen en evenals in § 20 te bedenken, dat

$$(0, b, c, \ldots)_{p+1} = \{mn - (b+c+\ldots) - p - t\}(b, c, \ldots)_{p+1}$$

en

$$(0, c, d, \ldots)_{p+b+1} = \{mn - (b+c+\ldots) - p - t + 1\}(c, d, \ldots)_{p+b+1}$$

is. Op deze wijze vindt men:

$$(1, b, c, \ldots)_p = 2\{mn - (b+c+\ldots) - p - t + g\}(b, c, \ldots)_{p+1} + \\ + \Sigma(b+1)[-(b+1, c, d, \ldots)_p + (b, c, \ldots)_{p+1} + \\ + \{mn - (b+c+\ldots) - p - t + 1\}(c, d, \ldots)_{p+b+1}].$$

Dit is de eerste recursieformule van Brill.

Met behulp van deze formules (of eigenlijk alleen van de eerstgenoemde, daar de andere daar een bijzonder geval van is) kan nu de juistheid van vergelijking (38) worden aangetoond in de onderstelling, dat de juistheid dier vergelijking voor alle lagere aanrakingsproblemen reeds bewezen is. Voor $t = 1, a = 0$ levert de vergelijking (38):

$$(0) = mn - p,$$

iets, waarvan de juistheid onmiddellijk is in te zien. Daarmede is dan de juistheid van het uitgangspunt aangetoond.

VIJFDE HOOFDSTUK.

UITBREIDINGEN VAN DE FORMULE VAN DE JONQUIÈRES.

---

§ 26. *Gedrag der oplossingen tegenover* CREMONA'*sche transformaties.*

In deze paragraaf denken we het stelsel der door de gegeven punten gaande krommen C_m door een willekeurig *lineair stelsel van de* $a+b+c+\ldots^{de}$ *orde en den* m^{den} *graad* vervangen. Daaronder verstaan we het geheel der krommen van den m^{den} graad, wier coëfficienten aan $\frac{1}{2}m(m+3)-(a+b+c+\ldots)$ onderling onafhankelijke lineaire betrekkingen voldoen. Het aanrakingsprobleem luidt dan:

Het aantal krommen C_m *van een lineair stelsel van de* $a+b+c+\ldots^{de}$ *orde te bepalen, die aan een gegeven* C_n *t vrije aanrakingen van de orden a, b, c, enz. vertoonen.*

Onder een *oplossing* van dit probleem verstaan we *een* C_m *van het stelsel, waarvan de mn snijpunten met* C_n *t groepen resp. van* $a+1, b+1$, *enz. samenvallende snijpunten bevatten, met de t daarop gelegen raakpunten,* zoodat we twee oplossingen als verschillend aanmerken als ze uit dezelfde C_m bestaan maar met andere raakpunten. Er kunnen echter ook twee of meer dier raakpunten samenvallen, d. w. z. twee of meer der vrije aanrakingen in eenzelfde punt worden uitgevoerd, maar dan mogen de samenvallende snijpunten, die voor een der aanrakingen gediend hebben, niet meer bij een andere vrije aanraking dienst doen, zoodat, wil-

len een a- en een b-voudige aanraking in eenzelfde punt worden uitgevoerd, daarvoor het samenvallen van minstens $a+b+2$ snijpunten noodig is.

Van veel belang blijken nu die oplossingen te zijn, *waarbij alle vrije aanrakingen wezenlijk worden uitgevoerd* (in al of niet verschillende punten). We zeggen dat een a-voudige aanraking *wezenlijk* wordt uitgevoerd, *als* $a+1$ *beweeglijke snijpunten van* C_m *en* C_n *langs eenzelfden tak der gegeven kromme in den oorsprong van dien tak zijn samengevallen.*

Hierbij verstaan we onder de *beweeglijke snijpunten van* C_m *en* C_n die snijpunten, die voor de verschillende krommen van het stelsel verschillend zijn. Vallen er bij een *willekeurige* kromme van het stelsel p snijpunten in de *vaste punten* (het lineaire stelsel kan, maar behoeft niet vaste punten te bezitten), dan is het aantal *vaste snijpunten* gelijk aan p, dat der *beweeglijke snijpunten* gelijk aan $n' = mn - p$.

Onder een *tak* van C_n verstaan we *het geheel der punten, wier coördinaten aan eenzelfde* PUISEUX'*sche reeksontwikkeling voldoen.* Is dit een ontwikkeling van $y-\eta$ naar opklimmende positieve machten van $x-\xi$, dan noemen we het punt (ξ, η) den *oorsprong* van den tak. Met CAYLEY (171) noemen we een tak *lineair* als de reeksontwikkeling slechts geheele exponenten heeft, *superlineair* als daar ook gebroken exponenten in voorkomen; hierbij wordt steeds stilzwijgend ondersteld, dat de raaklijn in den oorsprong niet evenwijdig aan de Y-as is. Den kleinsten gemeenschappelijken noemer der exponenten der reeksontwikkeling noemen we den *graad* van den tak. Zeggen we dat eenige snijpunten van C_m en C_n in den oorsprong van een tak van C_n samenvallen, dan wordt daarmede bedoeld, dat die snijpunten bij een willekeurige kleine verplaatsing van C_m ook werkelijk op dien tak voor den dag komen en dus niet op andere takken van C_n met denzelfden oorsprong komen te liggen.

De belangrijkheid der oplossingen, die alle vrije aanrakingen

wezenlijk uitvoeren, is gelegen in hun gedrag tegenover biratio-nale transformaties van CREMONA (169). Past men op de geheele figuur, zoowel de gegeven kromme als het lineaire stelsel, zulk een transformatie toe, dan gaat het lineaire stelsel in een ander lineair stelsel van dezelfde orde maar van (in het algemeen) anderen graad over. Verder komt met den oorsprong van iederen tak der gegeven kromme slechts *één* oorsprong van een tak der getransformeerde kromme overeen [1]) (waarbij echter samenvallende oorsprongen van verschillende takken tot in verschillende punten gelegen oorsprongen getransformeerd kunnen worden). Daar verschillende buiten de fundamentaalpunten en de fundamentaalkrommen der transformatie gelegen punten tot even zoovele verschillende punten getransformeerd worden en de beweeglijke snijpunten van C_n met een *willekeurige* kromme van het lineaire stelsel buiten die fundamentaalpunten en -krommen gelegen zijn, *zal het aantal n' der beweeglijke snijpunten door de* CREMONA'*sche transformatie niet veranderen* of, zooals we het uitdrukken, *rationaal-invariant* zijn [2]). Wanneer nu bij een bepaalde kromme van het stelsel $a+1$ beweeglijke snijpunten langs eenzelfden tak van C_n in den oorsprong van dien tak zijn samengevallen, zal

---

[1]) Dat dit zoo is blijkt het gemakkelijkst uit de beschouwing van het bij de gegeven kromme behoorende RIEMANN'sche oppervlak. Met den oorsprong van iederen tak komt n.l. slechts één punt van het RIEMANN'sche oppervlak overeen (waarbij boven elkaar gelegen maar tot verschillende niet in dat punt samenhangende bladen van het oppervlak behoorende punten als verschillend moeten worden opgevat) en omgekeerd. Door de CREMONA'sche transformatie ontstaat nu uit ieder punt van het RIEMANN'sche oppervlak slechts één punt van het getransformeerde oppervlak, zoodat uit iederen oorsprong van een tak der oorspronkelijke kromme slechts één oorsprong van een tak der getransformeerde kromme ontstaat.

[2]) De vaste punten van het stelsel en dus ook het aantal vaste snijpunten van C_m en C_n kunnen echter door de transformatie wel veranderen.

deze eigenschap dus door een birationale transformatie niet verstoord worden. Hieruit volgt:

I. *Oplossingen, die alle vrije aanrakingen wezenlijk uitvoeren, zijn bestand tegen* CREMONA'*sche transformaties, d. w. z. blijven na zulk een transformatie oplossingen van het getransformeerde probleem.*

Van een dergelijke oplossing zeggen we, dat ze tot de *wezenlijke oplossingen* behoort. We zeggen echter daarmede niet, dat ze *uitsluitend* een wezenlijke oplossing is, daar blijken zal, dat zulk een oplossing ook nog voor eenige *onwezenlijke oplossingen* gerekend kan moeten worden [1]).

---

[1]) De benamingen *wezenlijk* en *onwezenlijk* ontleenen we aan KRONECKER. Zij y een n-waardige geheele algebraïsche functie van x, die door de onsplitsbare vergelijking $F(x, y) = 0$ gedefinieerd is, waarin F een geheele rationale functie van x en y voorstelt, die in y van den graad n is en als coëfficient van y^n een constante heeft, en zij $D(x)$ de naar y gevormde discriminant. Door de subsfitutie $y_1 =$ *rationale functie* (x, y) gaat de vergelijking $F(x, y) = 0$ over in $F_1(x, y_1) = 0$, waardoor eveneens een n-waardige geheele algebraïsche functie van x gedefinieerd is; zij de discriminant daarvan $D_1(x)$. Den grootsten gemeenen deeler van $D(x)$ en $D_1(x)$ voor alle mogelijke rationale substituties noemt KRONECKER (173 *Crelle's Journal Bd.* 91, p. 312—313) den „wesentlichen Teiler", terwijl hij den anderen volledig kwadratischen factor, die door de substitutie gewijzigd kan worden, den „ausserwesentlichen Teiler" van den discriminant noemt. Eenzelfde lineaire factor kan natuurlijk tegelijkertijd tot den wezenlijken en tot den onwezenlijken deeler behooren, beide malen met een zekeren exponent aangedaan, zoodat we van de *wezenlijke* en de *onwezenlijke multipliciteit* van dien factor kunnen spreken, welke laatste steeds even is. De wezenlijke multipliciteit van zulk een factor is dan de kleinste waarde, waartoe de multipliciteit door een rationale substitutie gereduceerd kan worden.

De wortels van den nul gestelden discriminant kunnen dus in drie soorten verdeeld worden, n.l. in *uitsluitend wezenlijke oplossingen*, die alleen den wezenlijken deeler nul maken, *uitsluitend onwezenlijke oplossingen*, die

Tegenover de oplossingen, die alle vrije aanrakingen wezenlijk uitvoeren, staan de *oplossingen, die men door een* CREMONA'*sche transformatie kan doen verdwijnen;* deze noemen we *uitsluitend onwezenlijke oplossingen.* Daarvoor heeft men, zooals blijken zal, het volgende kenmerk:

II. *Een oplossing is uitsluitend onwezenlijk zoodra een der vrije aanrakingen onwezenlijk wordt uitgevoerd.*

Een vrije a-voudige aanraking wordt *onwezenlijk* uitgevoerd als, om de $a+1$ samenvallende snijpunten vol te krijgen, vaste snijpunten of langs verschillende takken van C_n samenvallende snijpunten medegeteld moeten worden.

Dat men een oplossing, waarbij een of meer der vrije aanrakingen onwezenlijk worden uitgevoerd, door een birationale transformatie als oplossing kan doen verdwijnen is gemakkelijk in te zien. Men kan n.l. de transformatie zoo inrichten, dat samenvallende oorsprongen van verschillende takken tot verschillende punten getransformeerd worden (zie NOETHER **172** *Math. Ann. Bd.* 9). Zij nu S het punt, waar een vrije a-voudige aanraking onwezenlijk wordt uitgevoerd, en onderstellen we dat dit punt oorsprong van meerdere takken van C_n en tevens een vast punt van het stelsel is [1]). Beschouwen we verder een *willekeurige* kromme van het stelsel (die dus geen beweeglijke snijpunten met C_n in S werpt), dan kunnen we door een CREMONA'sche transformatie bereiken (door n.l. het punt S als fundamentaalpunt der transformatie te kiezen), dat het punt S als oorsprong van de verschillende

---

alleen den onwezenlijken deeler nul maken, en *gemengde oplossingen*, die beide deelers nul maken. Zulk een gemengde oplossing is dan te beschouwen als te zijn ontstaan door het samenvallen van eenige wezenlijke en eenige onwezenlijke oplossingen.

[1]) Men ziet gemakkelijk hoe het volgende te wijzigen is als S geen vast punt van het stelsel maar alleen oorsprong van meerdere takken van C_n is.

takken van C_n en als punt van de willekeurig gekozen C_m tot verschillende punten getransformeerd wordt. Zijn nu S_1, S_2, enz. de punten der getransformeerde C_n, die uit S ontstaan zijn, dan zal geen dier punten S_i een vast punt van het getransformeerde lineaire stelsel zijn. De kromme, die ontstaat door transformatie der oplossing, die de a-voudige aanraking in S onwezenlijk uitvoert, zal nu in geen der punten S_i $a+1$ of meer snijpunten werpen, daar het aantal daarvan gelijk is aan dat der beweeglijke snijpunten, die de oorspronkelijke C_m langs de verschillende door S gaande takken in S werpt; dit laatste aantal bedraagt echter volgens de onderstelling, dat de a-voudige aanraking in S onwezenlijk wordt uitgevoerd, voor geen dier takken $a+1$ of meer.

Hieruit volgt, *dat men door een* CREMONA'*sche transformatie de langs verschillende takken van C_n samenvallende beweeglijke snijpunten onderling en van de er mede samenvallende vaste snijpunten scheiden kan*, dus:

Men kan een onwezenlijke aanraking door een CREMONA'*sche transformatie verloren doen gaan.*

Het zou echter wel kunnen gebeuren, dat het lineaire stelsel door de transformatie vaste punten krijgt, die op de getransformeerde C_n gelegen zijn, waardoor de a-voudige aanraking door de getransformeerde C_m in plaats van in het getransformeerde raakpunt in een dier vaste punten onwezenlijk wordt uitgevoerd. Zulk een oplossing van het getransformeerde probleem is evenwel niet ontstaan door transformatie der oplossing van het oorspronkelijke probleem, daar daarvoor noodig zou zijn, dat ook de raakpunten door transformatie in elkaar overgaan; immers we hebben afgesproken onder een oplossing de C_m te zamen met de t raakpunten te verstaan.

Hiermede is aangetoond, dat de CREMONA'sche transformatie zoo gekozen kan worden, dat door transformatie der oplossing die een of meer der vrije aanrakingen onwezenlijk uitvoert, iets ontstaat, dat geen oplossing van het getransformeerde probleem is.

Een oplossing, die alle vrije aanrakingen wezenlijk uitvoert, blijft (zooals vroeger gebleken is; zie p. 154) na iedere birationale transformatie een oplossing van het getransformeerde probleem. De *multipliciteit* der oplossing kan echter door de transformatie een verandering hebben ondergaan; hierbij verstaan we onder de *multipliciteit* eener oplossing het grootste aantal verschillende oplossingen, waarin men de oorspronkelijke oplossing uiteen kan doen gaan door in de gegevens (waaronder we de gegeven kromme en het lineaire stelsel verstaan) een kleine wijziging aan te brengen. Terwijl het steeds mogelijk is de multipliciteit eener oplossing door een CREMONA'sche transformatie te vergrooten (door b.v. de transformatie zoo in te richten, dat het aantal in een der vrije raakpunten[1]) vallende vaste snijpunten van C_m en C_n toeneemt), is het niet steeds mogelijk die multipliciteit te verkleinen; dit is b.v. ten duidelijkste niet mogelijk bij een *enkelvoudige* oplossing, die alle vrije aanrakingen wezenlijk uitvoert, zonder dat evenwel omgekeerd iedere tot de wezenlijke behoorende oplossing tot een enkelvoudige getransformeerd kan worden.

Een oplossing, waarvan de multipliciteit door een CREMONA'*sche transformatie niet verkleind kan worden, noemen we een* u i t s l u i t e n d *w e z e n l ij k e oplossing.*

We zullen aantoonen, dat men met zulk een oplossing te doen heeft, dan en dan alleen *als alle vrije aanrakingen in buiten de vaste punten van het stelsel en buiten de meervoudige punten*[2]) *der gegeven kromme gelegen* (al of niet samenvallende) *punten worden uitgevoerd.* Zulk een oplossing behoeft natuurlijk niet enkelvoudig te zijn, maar kan een van *één* verschillende multipliciteit bezitten doordat een of meer der vrije aanrakingen *overmatig*[3]) worden

---

[1]) Onder een vrij raakpunt verstaan we het raakpunt eener vrije aanraking.

[2]) Hieronder ook dubbelpunten met inbegrip van keerpunten te verstaan.

[3]) We zeggen dat een a-voudige aanraking *overmatig* wordt uitgevoerd, als er meer dan $a+1$ snijpunten samenvallen.

uitgevoerd. Is de multipliciteit i, dan kan men de oplossing door een kleine wijziging in de gegevens in i verschillende oplossingen uiteen doen gaan [1]). *Het is echter niet mogelijk die wijziging zoodanig aan te brengen, dat er zich van de oplossing een of meer uitsluitend onwezenlijke oplossingen afscheiden.* Past men nu op het gewijzigde aanrakingsprobleem een CREMONA'sche transformatie toe, dan gaan de i dicht bijeen gelegen oplossingen in i eveneens tot de wezenlijke behoorende oplossingen over. Bij overgang tot de limiet, waardoor de i oplossingen van het oorspronkelijke probleem samenvallen, zullen ook de i getransformeerde oplossingen samenvallen. Het kan echter gebeuren, dat tot die i getransformeerde oplossingen nog eenige uitsluitend onwezenlijke oplossingen naderen, waardoor bij de limiet de multipliciteit der getransformeerde oplossing wel grooter maar niet kleiner dan i worden kan. We vinden dus:

III. *De multipliciteit eener oplossing, die alle vrije aanrakingen buiten de vaste punten van het stelsel en buiten de meervoudige punten der gegeven kromme uitvoert, kan door een* CREMONA'*sche transformatie niet verkleind worden. Zulk een oplossing is dus uitsluitend wezenlijk.*

Aangetoond moet nu nog worden, dat dit de eenige uitsluitend wezenlijke oplossingen zijn, m. a. w. dat de multipliciteit der oplossing verminderd kan worden zoodra zich een der drie volgende omstandigheden voordoet: 1°. een vrij raakpunt valt in een vast punt van het lineaire stelsel, 2°. een vrij raakpunt is oorsprong van nog andere takken der gegeven kromme dan van dien, waaraan de aanraking wordt uitgevoerd, 3°. een vrije aanraking wordt aan een superlineairen tak der gegeven kromme uitgevoerd. (Hierbij

---

[1]) Bij de vraag b.v. naar de raaklijnen van uit een punt P aan een kromme te trekken zal een buigraaklijn, als P daarop gelegen is, een oplossing met een multipliciteit *twee* zijn. Door P van de buigraaklijn te verwijderen valt deze oplossing in twee oplossingen uiteen.

wordt echter steeds ondersteld, dat alle vrije aanrakingen wezenlijk worden uitgevoerd). In al deze gevallen kan men namelijk in de gegevens een zoodanige kleine wijziging aanbrengen, dat er zich van de oorspronkelijke oplossing eenige uitsluitend onwezenlijke oplossingen afscheiden [1]). Men kan nu de CREMONA'sche transformatie zoo inrichten, dat die onwezenlijke oplossingen verdwijnen zonder dat er weinig daarvan verschillende nieuwe onwezenlijke oplossingen voor in de plaats komen. Dit zal een vermindering der multipliciteit ten gevolge hebben. We vinden dus:

IV. *Een oplossing, die alle vrije aanrakingen wezenlijk uitvoert, maar waarvan niet alle vrije raakpunten buiten de vaste punten van het stelsel en de meervoudige punten der gegeven kromme liggen, is te beschouwen als te zijn ontstaan door het samenvallen van eenige wezenlijke en eenige onwezenlijke oplossingen. Deze laatste kunnen er door een* CREMONA'*sche transformatie uit verwijderd worden, waardoor de multipliciteit der oplossing afneemt.*

Een dergelijke oplossing kunnen we een *gemengde oplossing* noemen. Van zulk een gemengde oplossing kan de multipliciteit door een birationale transformatie wel verkleind maar niet

---

[1]) Is een vrij raakpunt een vast punt van het lineaire stelsel, dan heeft men zich daartoe dit vaste punt een weinig langs de gegeven kromme verplaatst voor te stellen. Is het raakpunt geen vast punt van het stelsel maar oorsprong van nog andere takken der gegeven kromme dan van dien, waaraan de aanraking wordt uitgevoerd, dan denken we ons die takken een weinig zoo verschoven, dat ze niet meer door het vrije raakpunt gaan. Is eindelijk het raakpunt geen vast punt van het stelsel, maar wordt de aanraking aan een superlineairen tak van C_n uitgevoerd, dan hebben we ons voor te stellen, dat de samenvallende raaklijnen in den oorsprong van dien tak een weinig uiteen gaan, waardoor een gewoon meervoudig punt ontstaat. In al die gevallen scheiden zich bij de aangegeven wijziging uit de oorspronkelijke oplossing een of meer oplossingen af, die uitsluitend onwezenlijk zijn.

nul gemaakt worden. *De kleinste waarde, waartoe haar multipliciteit door een* CREMONA'*sche transformatie gereduceerd kan worden, noemen we de wezenlijke multipliciteit der gemengde oplossing.*

Bij een uitsluitend wezenlijke oplossing is de totale multipliciteit gelijk aan de wezenlijke. *Bij een gemengde oplossing is de totale multipliciteit grooter dan de wezenlijke* met een bedrag, dat we de *onwezenlijke multipliciteit* noemen [1]).

Heeft men de multipliciteit eener gemengde oplossing door een birationale transformatie zooveel als mogelijk is verkleind, dan is de oplossing in een uitsluitend wezenlijke oplossing overgegaan. We vinden dus:

V. *Iedere oplossing, die alle vrije aanrakingen wezenlijk uitvoert, kan door een* CREMONA'*sche transformatie in een uitsluitend wezenlijke oplossing veranderd worden, d. w. z. in een oplossing, waarbij alle vrije raakpunten buiten de vaste punten van het stelsel en buiten de meervoudige punten der gegeven kromme liggen.*

Dat dit zoo is, is ook rechtstreeks gemakkelijk in te zien. Immers (zooals we bij de beschouwing der uitsluitend onwezenlijke oplossingen beredeneerd hebben) door een CREMONA'sche transformatie kunnen de vaste punten van het stelsel en de oorsprongen van andere takken dan van die, waaraan de vrije aanrakingen worden uitgevoerd, van de vrije raakpunten gescheiden worden.

---

[1]) Als voorbeeld diene de vraag naar de raaklijnen van uit een punt P aan de gegeven kromme te trekken. Ligt P willekeurig, dan heeft de verbindingslijn met een keerpunt een wezenlijke multipliciteit *één* en een onwezenlijke multipliciteit *twee*. Ligt P op de keerraaklijn, dan zijn beide multipliciteiten gelijk aan *twee*, terwijl als P in het keerpunt valt de keerraaklijn een uitsluitend onwezenlijke oplossing is en dus een wezenlijke multipliciteit *nul* heeft. Als tweede voorbeeld kiezen we de vraag naar de buigraaklijnen, waarbij aan een keerraaklijn een wezenlijke multipliciteit *twee* en een onwezenlijke multipliciteit *zes* toekomt.

Wordt verder een der vrije aanrakingen aan een superlineairen tak uitgevoerd, dan kan deze volgens de onderzoekingen van NOETHER (172) birationaal tot een lineairen tak getransformeerd worden. Door de transformatie kunnen er evenwel in het lineaire stelsel nieuwe vaste punten ontstaan, maar de transformatie kan steeds zoo worden ingericht, dat deze buiten de getransformeerde vrije raakpunten vallen.

Men kan hieruit nog de volgende definitie voor de wezenlijke multipliciteit eener gemengde oplossing afleiden:

De wezenlijke multipliciteit eener gemengde oplossing is de multipliciteit der uitsluitend wezenlijke oplossing, waartoe ze birationaal getransformeerd kan worden.

Behalve de onderscheiding in *uitsluitend wezenlijke, uitsluitend onwezenlijke* en *gemengde* oplossingen is door ons reeds herhaaldelijk een andere toegepast, die n.l. in *eigenlijke* en *oneigenlijke oplossingen.* Onder een *eigenlijke oplossing* verstaan we *een oplossing, waarbij alle vrije aanrakingen op eigenlijke wijze buiten de vaste punten van het stelsel worden uitgevoerd.* Hierbij spreken we van een *eigenlijke* aanraking *als de beide elkaar rakende takken lineair zijn en reeds op zich zelve een aanraking van de verlangde orde uitvoeren,* onverschillig of het raakpunt al dan niet oorsprong van nog andere takken der rakende krommen is. Alle andere oplossingen noemen we *oneigenlijk.* Hieruit volgt reeds direct, dat iedere uitsluitend onwezenlijke oplossing oneigenlijk is, maar niet omgekeerd.

Vergelijkt men het kenmerk eener eigenlijke oplossing met dat eener uitsluitend wezenlijke oplossing, dan blijkt dat het onderscheid daarin gelegen is, dat bij een eigenlijke oplossing noodig is dat de rakende tak van C_m lineair is, hetgeen bij een uitsluitend wezenlijke oplossing niet het geval behoeft te zijn [1]). In een ander

[1]) Zelfs behoeven de samenvallende snijpunten niet tot denzelfden tak van C_m te behooren.

opzicht is echter weer het kenmerk der uitsluitend wezenlijke oplossingen beperkter, daar het raakpunt daarbij geen meervoudig punt van C_n mag zijn, hetgeen bij een eigenlijke oplossing wel veroorloofd is, mits slechts de rakende tak van C_n lineair is. Hieruit volgt, dat een oneigenlijke oplossing uitsluitend wezenlijk en een eigenlijke oplossing gemengd zijn kan.

Van ieder der gevallen, die zich hierbij kunnen voordoen, laten we een voorbeeld volgen.

Bij de vraag naar de raaklijnen van uit een punt P aan een kromme te trekken is, bij willekeurige ligging van P, de verbindingslijn met een dubbelpunt als oplossing *uitsluitend onwezenlijk* en dus *oneigenlijk*, de verbindingslijn met een keerpunt *gemengd* en *oneigenlijk*, terwijl een raaklijn door P, waarvan het raakpunt geen bijzonder punt der gegeven kromme is, *uitsluitend wezenlijk* en *eigenlijk* is. Ligt P op een dubbelpuntsraaklijn, dan is deze laatste een *gemengde* maar *eigenlijke* oplossing. Bij de vraag naar de kegelsneden door vier twee aan twee samenvallende gegeven punten, die een gegeven C_n aanraken, is (bij overigens willekeurige ligging der gegeven punten) de dubbeltellende verbindingslijn dier punten n maal een oplossing, die *uitsluitend wezenlijk* maar *oneigenlijk* is.

---

§ 27. *Verdere strekking der formule van* DE JONQUIÈRES.

Zooals we reeds in § 19 (p. 127) hebben opgemerkt geldt de formule van DE JONQUIÈRES ook dan als er gegeven punten in gewone punten of in dubbelpunten van C_n samenvallen (hetgeen al of niet langs C_n kan geschieden), mits men onder p het aantal *vaste snijpunten* van C_m en C_n versta. Hierbij kunnen we evenals in de vorige paragraaf het stelsel der door de gegeven punten gaande krommen door een willekeurig lineair stelsel vervangen.

Zooals uit de afleiding van DE JONQUIÈRES en ook uit die met behulp der recursieformules van BRILL (zie § 25) onmiddellijk volgt, zijn in de formule van DE JONQUIÈRES alleen die oplossingen medegeteld, *die alle vrije aanrakingen wezenlijk uitvoeren* en dus tot de *wezenlijke oplossingen* behooren (zie § 26). In het algemeen zijn dit *uitsluitend wezenlijke oplossingen*, die met de hun toekomende multipliciteit (die dan tevens de wezenlijke multipliciteit is) in rekening gebracht moeten worden.

Er kunnen onder de oplossingen, waarvan de formule van DE JONQUIÈRES het aantal aangeeft, echter ook wel *gemengde* voorkomen, b.v. als een a-voudige aanraking in een dubbelpunt aan een der takken door dat dubbelpunt wordt uitgevoerd. De multipliciteit, waarmede zulk een oplossing in de formule van DE JONQUIÈRES optreedt, is dan dezelfde alsof de gegeven kromme niet nog eens door het raakpunt ging en dus niets anders dan dat, wat we in § 26 (p. 160) de *wezenlijke multipliciteit* genoemd hebben. Hieruit volgt:

De formule van DE JONQUIÈRES *geeft voor een gegeven kromme, die slechts gewone dubbelpunten bezit, het aantal oplossingen aan, ieder met haar wezenlijke multipliciteit in rekening gebracht*, of kortweg *het aantal wezenlijke oplossingen.*

Ook als de gegeven kromme gewone meervoudige punten [1]) bezit geeft de formule van DE JONQUIÈRES het aantal wezenlijke oplossingen aan, echter alleen *zoolang dit aantal eindig is.* Dat dit zoo is, is weer uit de afleiding van DE JONQUIÈRES en ook uit die van BRILL in te zien. Deze afleidingen gaan n.l. ook voor een gegeven kromme met slechts gewone meervoudige punten

---

[1]) Onder een *t-voudig punt* S of een *punt van den graad* t van C_n verstaan we een punt, waarin een willekeurige door S gaande rechte t snijpunten met C_n werpt. We noemen S een *gewoon meervoudig punt* als C_n in het punt S t verschillende raaklijnen heeft, dus als het punt S oorsprong is van t elkaar niet rakende lineaire takken van C_n.

onveranderd door. Hierbij kan zich evenwel een omstandigheid voordoen, die we (daar de quaestie bij een niet-rationale C_n dezelfde is als bij een rationale) gemakshalve voor het geval van een rationale gegeven kromme bespreken zullen.

Bij de afleiding van DE JONQUIÈRES (zie § 20) wordt het probleem tot lagere aanrakingsproblemen teruggebracht door door een willekeurig punt Q van C_n en de $a-1$ volgende punten de $(b, c, \ldots)_{p+a}$ krommen C_m van het stelsel aan te brengen, die aan C_n $t-1$ vrije aanrakingen van de orden $b, c, \ldots$ volbrengen [1]). Ieder dier krommen C_m snijdt C_n behalve in Q en de vrije raakpunten nog in $mn-(a+b+c+\ldots)-$ $-p-t+1$ punten Q'. Onderstel nu, dat S een meervoudig punt van C_n is van dien aard, dat hoe het punt Q ook gekozen worde een (of meer) der $(b, c, \ldots)_{p+a}$ krommen C_m eenige vrije aanrakingen wezenlijk in het punt S uitvoert, en wel zoo, dat er meer beweeglijke snijpunten (b.v. ten getale van l) in S vallen dan voor het uitvoeren dier aanrakingen noodig is. In dat geval zal het aantal buiten Q en de vrije raakpunten gelegen snijpunten dier C_m met C_n minder dan $mn-(a+b+c+\ldots)-p-t+1$ bedragen, zoodat dan ook het totale aantal A' der met Q correspondeerende punten Q' verminderd is [2]). Onverschillig of ook A een vermindering

---

[1]) Deze krommen C_m vormen te zamen de correspondentiekromme van het punt Q (zie § 17).

[2]) Dat iets dergelijks zich werkelijk voor kan doen, ziet men uit het volgende voorbeeld. Gevraagd worde het aantal krommen C_m door $\frac{1}{2}m(m+3)-4$ willekeurig gegeven punten, die een gegeven C_n met een gewoon viervoudig punt S viermaal enkelvoudig aanraken ($t=4, p=0, a=b=c=d=1$). Brengt men nu door een willekeurig punt Q van C_n de krommen C_m door de gegeven punten aan, die C_n driemaal enkelvoudig aanraken, dan is daar steeds een C_m onder, die in S een dubbelpunt heeft. Deze laatste levert niet $mn-7$ maar $mn-9$ buiten Q en de raakpunten (die nu alle drie in S vallen) gelegen snijpunten Q' met C_n op. Hierdoor wordt A' en ook A (die in dit voorbeeld $=A'$ is) verminderd, waardoor ook het aantal

ondergaan heeft, het aantal coincidenties, en dus ook het aantal daaruit voortvloeiende oplossingen van het aanrakingsprobleem, zal daardoor kleiner geworden zijn.

Bij deze oplossingen doen de l meerdere in S vallende snijpunten van C_n met de correspondentiekromme van Q voor het uitvoeren der vrije aanrakingen geen dienst. Behalve de uit de coincidenties van Q en Q' voortvloeiende oplossingen zijn er echter nog andere, waarbij juist die l snijpunten een rol spelen. Daar namelijk de correspondentiekromme van ieder punt Q van C_n een C_m bevat, die eenige vrije aanrakingen, b.v. een b- en een c-voudige, op singuliere wijze in S uitvoert, zal de voorwaarde voor het op deze singuliere wijze uitvoeren dier aanrakingen hoogstens $b + c$-voudig kunnen zijn. Indien er nu van die l bovengenoemde snijpunten l_1 tot eenzelfden tak van C_n behooren, zal het voor C_m een

---

coincidenties afneemt. Het aantal door die coincidenties opgeleverde oplossingen ondergaat dan eveneens een vermindering, maar daar staat tegenover dat er nu oplossingen zijn, die niet het gevolg zijn van coincidentie der punten Q en Q', n.l. oplossingen, waarbij alle vier de aanrakingen in het punt S worden uitgevoerd. Alle door de gegeven punten gaande krommen C_m, die in S een dubbelpunt hebben, voldoen dan ook oneigenlijk aan de vraag. Het aantal dier oneigenlijke oplossingen is ∞^1, te zamen het ontbrekende aantal oplossingen vertegenwoordigend. Als vraag naar de groep der contactpunten hebben we echter slechts met één enkele (hoewel meervoudige) oplossing te doen. Door het aantal vrije aanrakingen te vermeerderen kan men ook de vraag naar de groep der contactpunten onbepaald maken. Wordt b.v. gevraagd naar de vijfmaal enkelvoudig aanrakende krommen C_m door $\frac{1}{2} m (m + 3) - 5$ gegeven punten, dan voldoet iedere door de gegeven punten gaande C_m aan de vraag, die in S (dat we ook nu een 4-voudig punt van C_n onderstellen te zijn) een dubbelpunt hebben en C_n elders enkelvoudig aanraken. Daar dit slechts vier gegevens vertegenwoordigt, kan het enkelvoudige raakpunt nog willekeurig op C_n worden aangenomen, zoodat ieder punt van C_n te zamen met S als een groep van contactpunten te beschouwen is, waarvan er vier in S samenvallen.

$a+1-l_1$-voudige voorwaarde zijn, dat zich daar nog $a+1-l_1$ op dienzelfden tak gelegen in S vallende snijpunten bijvoegen en dus aan dien tak in het punt S ook de a-voudige aanraking wezenlijk wordt uitgevoerd. Terwijl in het algemeen een a-voudige vrije aanraking a gegevens vertegenwoordigt, krijgt men in dit bijzondere geval hiervoor $a+1-l_1$ gegevens, dus minder dan a gegevens zoodra $l_1 \geq 2$ is. In dat geval zijn (als men wil dat op de boven beschreven wijze de a-, b- en c-voudige aanraking in het punt S worden uitgevoerd) de aanrakingsvoorwaarden niet voldoende om C_m te bepalen. Het aantal oneigenlijke maar wezenlijke oplossingen wordt dan oneindig groot.

In het beschouwde geval, dat S een gewoon meervoudig punt is, zal echter (als zich de bijzonderheid in quaestie al voordoet) steeds $l_1 \geq 2$ zijn. Indien er n.l. door ieder punt Q van C_n en de $a-1$ volgende punten een tot het gegeven lineaire stelsel behoorende C_m mogelijk wil zijn, die aan C_n $t-1$ vrije aanrakingen van de orden $b, c, d, \ldots$ wezenlijk uitvoert zoodanig dat eenige vrije raakpunten in het punt S vallen, dan zal deze C_m in S noodzakelijk een meervoudig punt (punt van den tweeden of hoogeren graad) moeten vertoonen, zooals uit het in de noot van pag. 164 besproken voorbeeld duidelijk genoeg blijkt. Gaan er nu door het punt S behalve de takken, waaraan de aanrakingen worden uitgevoerd, nog andere takken van C_n, dan zal ieder dier takken door deze C_m in minstens twee samenvallende punten S gesneden worden, zoodat voor ieder dier takken l_1 minstens de waarde *twee* hebben zal [1]).

Uit het voorgaande blijkt, dat bij een gegeven C_n met gewone

---

[1]) Indien echter S een meervoudig punt van C_n is, waardoor eenige lineaire elkaar rakende takken gaan, dan is het mogelijk, dat de correspondentiekromme van ieder punt Q van C_n door het punt S gaat, zonder dat S een meervoudig punt dier correspondentiekromme is, waardoor $l_1 = 1$ worden kan. Ter toelichting diene het volgende voorbeeld. Zij S een

meervoudige punten de afleidingen der formule van DE JONQUIÈRES alleen dan niet doorgaan, als het aantal wezenlijke oplossingen oneindig groot wordt. We vinden dus:

Heeft de gegeven kromme slechts gewone meervoudige punten, dan stelt de formule van DE JONQUIÈRES *nog steeds het aantal wezenlijke oplossingen voor zoolang dit eindig is*[1]).

Vervangt men in de formule van DE JONQUIÈRES $mn-p$ door n', het aantal beweeglijke snijpunten van C_m en C_n, dan zijn alle in die formule voorkomende grootheden *rationaal-invariant*, d.w.z. blijven bij een birationale transformatie onveranderd. Daar ook de wezenlijke multipliciteit van een oplossing (d. i. tevens de multipliciteit, waarmede de oplossing in de formule van DE JONQUIÈRES voorkomt) door een birationale transformatie niet verandert, volgt hieruit:

Is de formule van DE JONQUIÈRES *voor een bepaalde gegeven kromme*

---

drie-voudig punt van C_n, waardoor drie lineaire takken I, II en III gaan, waarvan I en II elkaar in S aanraken, en worde gevraagd naar de krommen C_m door $\frac{1}{2}m(m+3)-3$ gegeven punten, die C_n driemaal enkelvoudig aanraken. Brengt men nu door een willekeurig punt Q van C_n de krommen C_m aan, die door de gegeven punten gaan en C_n tweemaal enkelvoudig aanraken, dan komt voor ieder punt Q daaronder een C_m voor, die door het punt S gaat en daar de beide takken I en II van C_n aanraakt. Deze C_m heeft in S geen meervoudig punt en snijdt dan ook den tak III (die ondersteld wordt niet aan de takken I en II te raken) slechts in één punt S, zoodat voor dien tak $l_1 = 1$ is. Bij dit voorbeeld is het aantal der door het punt S veroorzaakte oneigenlijke oplossingen dan ook niet oneindig groot. De eenige door het punt S veroorzaakte oneigenlijke (meervoudige) oplosing is de door de gegeven punten gaande C_m, die in S een dubbelpunt heeft.

[1]) Bij het hiervoor geleverde betoog is echter nog geenszins met alle denkbare bijzonderheden rekening gehouden, o. a. niet met die, waarbij gegeven punten in meervoudige punten van C_n vallen. Het resultaat is evenwel ook voor die gevallen hetzelfde.

en een bepaald lineair stelsel juist, dan is die formule ook juist voor ieder aanrakingsprobleem, dat er door een CREMONA'*sche transformatie uit ontstaat, mits men aan iedere oplossing haar wezenlijke multipliciteit toekenne.*

Hieruit is gemakkelijk af te leiden, dat de formule van DE JONQUIÈRES ook voor een gegeven kromme met hoogere singulariteiten (dus met superlineaire takken) juist is, waarbij dan echter de oneigenlijke oplossingen, die alle aanrakingen wezenlijk, waarvan sommige in oorsprongen van superlineaire takken, uitvoeren, met hun wezenlijke multipliciteit moeten worden medegeteld. Dat dit zoo is volgt onmiddellijk uit een stelling van NOETHER (**172** *Math. Annalen Bd.* 9), volgens welke iedere algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten door een birationale transformatie in een kromme veranderd kan worden, die slechts gewone meervoudige punten (d. w. z. meervoudige punten met gescheiden raaklijnen) bezit [1]). Hieruit volgt dat ieder aanrakingsprobleem birationaal getransformeerd kan worden tot een, waarop de formule van DE JONQUIÈRES van toepassing is, waaruit dan de juistheid dier formule ook voor het oorspronkelijke probleem volgt.

Het blijkt dus, dat de formule van DE JONQUIÈRES steeds het aantal wezenlijke oplossingen aangeeft ook dan als de gegeven kromme hoogere singulariteiten bezit, natuurlijk *mits het aantal wezenlijke oplossingen eindig zij*. Door dit laatste wordt de toepasbaarheid der formule echter weer aanmerkelijk beperkt. Immers reeds als de gegeven kromme een superlineairen tak van den 3den graad (zie p. 152) heeft, wiens oorsprong geen vast punt van het stelsel is, wordt het aantal wezenlijke oplossingen oneindig groot. Legt men n.l. aan een kromme van het stelsel de enkel-

---

[1]) Omtrent de prioriteit, die KRONECKER op deze stelling kan doen gelden, zie men **157** *Jahresber. der Deutschen Math. Ver. Bd.* 3, p. 371 noot.

voudige voorwaarde op door den oorsprong van dien tak te gaan, dan vallen daardoor drie beweeglijke snijpunten langs dien tak in zijn oorsprong samen. De voorwaarde, dat er $a+1$ beweeglijke snijpunten in den oorsprong van dien tak vallen, is dus hoogstens $a-1$-voudig, waaruit volgt dat de C_m, die de a-voudige aanraking in den oorsprong van den tak van den derden graad uitvoert, door de aanrakingsvoorwaarden niet bepaald is; een der andere vrije raakpunten kan men dan nog geheel willekeurig aannemen.

Het is duidelijk dat iets dergelijks zich even goed kan voordoen als de gegeven kromme geen superlineaire takken heeft, maar dan is het een bijzonderheid van het lineaire stelsel, die het aanrakingsprobleem onbepaald maakt. Immers wanneer men den tak van den 3den graad birationaal tot een lineairen tak transformeert, zal de bovengenoemde omstandigheid zich nog steeds blijven voordoen. Het getransformeerde lineaire stelsel is dan van dien aard, dat alle krommen, die door den oorsprong van dien lineairen tak gaan, daar dezelfde raaklijn en kromming hebben als de gegeven kromme, zoodat er door een enkelvoudige voorwaarde direct drie beweeglijke snijpunten tot samenvallen gebracht kunnen worden.

Resumeerend vinden we dus:

THEOREMA I. — *Gegeven zij een lineair stelsel van de* $(a+b+c+\ldots)^{de}$ *orde van algebraïsche vlakke krommen, die een gegeven kromme van het geslacht* g *in* n' *beweeglijke punten snijden. Het aantal krommen van het stelsel, die aan de gegeven kromme* t *vrije aanrakingen resp. van de orden* a, b, c, *enz. wezenlijk uitvoeren*[1]), *bedraagt, zoo dit eindig is, steeds:*

---

[1]) Waarbij dus iedere oplossing met haar *wezenlijke multipliciteit* in rekening moet worden gebracht, d. i. de kleinste waarde waartoe haar multipliciteit door een CREMONA'sche transformatie gereduceerd kan worden (zie § 26).

$$(a, b, c, \ldots) =$$

$$\frac{1}{P}(a+1)(b+1)(c+1)\ldots \left\{ \begin{array}{l} [n'-(a+b+c+\ldots)\quad]^t \quad + \\ + [n'-(a+b+c+\ldots)-1]^{t-1}(a+b+c+\ldots)[g]^1 \\ + [n'-(a+b+c+\ldots)-2]^{t-2}(ab+ac+bc+\ldots)[g]^2 \\ + [n'-(a+b+c+\ldots)-3]^{t-3}(abc+abd+bcd+\ldots)[g]^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + [n'-(a+b+c+\ldots)-t]^0 \quad (abc\ldots\ldots\ldots)[g]^t \end{array} \right\}. \quad (43)$$

Hierin is $[x]^i$ *een afkorting voor* $x(x-1)(x-2)\ldots(x-i+1)$, *terwijl* P *het aantal malen beteekent, waarop de onderling gelijke der aanrakingsindices* $a, b, c, \ldots$ *gepermuteerd kunnen worden.*

---

§ 28. CAYLEY's *uitbreiding van de formule van* DE JONQUIÈRES.

De formule van DE JONQUIÈRES geeft alleen dan het aantal eigenlijke oplossingen aan [1]) als de gegeven kromme slechts gewone dubbelpunten maar geen keerpunten heeft. Door CAYLEY (3 *Phil. Trans. Vol.* 158, *Coll. Pap. Vol.* 6, art. 74—93) is die formule uitgebreid tot een kromme die behalve δ dubbelpunten nog $\varkappa$ keerpunten bezit. Hierbij beperkt CAYLEY zich aan den anderen kant weer tot het geval, dat geen der gegeven punten op de gegeven C_n ligt en dus $p=0$ is.

De formule van CAYLEY voor het geval van vier voorgeschreven aanrakingen van de orden a, b, c en d luidt:

$$(a, b, c, d) =$$

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \left\{ \begin{array}{l} [mn-(a+b+c+d)\quad]^4 \quad + \\ +[mn-(a+b+c+d)-1]^3(a+b+c+d)[g]^1 \\ +[mn-(a+b+c+d)-2]^2(ab+ac+\ldots+cd)[g]^2 \\ +[mn-(a+b+c+d)-3]^1(abc+\ldots\ldots+bcd)[g]^3 \\ + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad abcd\,[g]^4 \end{array} \right\} -$$

[1]) Behoudens de in § 24 besproken beperkingen.

$$
\begin{aligned}
&-[\Sigma a(b+1)(c+1)(d+1)\left\{\begin{array}{l}[mn-(a+b+c+d)-1]^3+\\ +[mn-(a+b+c+d)-2]^2(b+c+d)[g]^1\\ +[mn-(a+b+c+d)-3]^1(bc+bd+cd)[g]^2\\ +\qquad\qquad\qquad\qquad bcd\,[g]^3\end{array}\right\}][\varkappa]^1+\\
&+[\Sigma ab(c+1)(d+1)\left\{\begin{array}{l}[mn-(a+b+c+d)-2]^2+\\ +[mn-(a+b+c+d)-3]^1(c+d)\,[g]^1\\ +\qquad\qquad\qquad\qquad cd\,[g]^2\end{array}\right\}][\varkappa]^2-\\
&-[\Sigma abc(d+1)\left\{\begin{array}{l}[mn-(a+b+c+d)-3]^1+\\ +\qquad\qquad\qquad\qquad d\,[g]^1\end{array}\right\}][\varkappa]^3+\\
&+[abcd\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad][\varkappa]^4 \ldots\ldots \quad (44)
\end{aligned}
$$

De wet der samenstelling dezer formule voor een willekeurig aantal aanrakingen is hier gemakkelijk uit te herkennen.

Voor deze formule gelden dezelfde opmerkingen als voor die van DE JONQUIÈRES. Zoo geeft ze evenals de formule van DE JONQUIÈRES het aantal groepen van contactpunten aan. Zijn er onder de getallen a, b, c, enz. α onderling gelijk, dan moet het opgegeven aantal, om dat der krommen C_m te vinden, door $[\alpha]^\alpha$ gedeeld worden. Verder geldt de formule weer alleen binnen een zeker *geldigheidsbereik*, n.l. als er geen krommen met meervoudige takken aan de vraag voldoen.

CAYLEY leidt zijn formule af door oplossing van functionaalvergelijkingen (zie § 12). Als het noodig is den graad der gegeven kromme, waarop de aanrakingsvoorwaarde betrekking heeft, aan te wijzen, geschiedt dit door toevoeging van een index, zoodat we dan $(a)_n$ in plaats van (a) schrijven.

Nu is (a) een functie van n, g en $\varkappa$, door welke drie grootheden de gegeven kromme gekenmerkt is. De overige in de formule optredende grootheden beschouwen we als standvastig. In plaats van g voert CAYLEY echter een grootheid $\Delta = g - 1$ in, omdat Δ voor een gedegenereerde kromme zich additief uit de Δ's der partieelkrommen samenstelt, maar g niet. Immers g is gedefinieerd uit:

$$g = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta - \varkappa = \tfrac{1}{2}k - n + \tfrac{1}{2}\varkappa + 1,$$

dus:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}k - n + \tfrac{1}{2}\varkappa.$$

Degenereert C_n nu in twee krommen C_{n_1} en C_{n_2}, dan is:

$$n = n_1 + n_2,$$
$$k = k_1 + k_2,$$
$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2,$$

dus:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Binnen het geldigheidsbereik der af te leiden formule heeft men eveneens:

$$(a)_{n_1+n_2} = (a)_{n_1} + (a)_{n_2}.$$

De oplossing van deze functionaalvergelijking, waarin (a) als een functie van n, Δ en $\varkappa$ beschouwd wordt, luidt:

$$(a)_n = [a]_n,$$

waarin $[a]_n$ een homogene lineaire functie van n, Δ en $\varkappa$ beteekent.

Laat men ter bepaling van $(a, b)_n$ de kromme C_n in twee krommen C_{n_1} en C_{n_2} degenereeren, dan vervallen de oplossingen in vier soorten, zoodat men heeft:

$$(a, b)_{n_1+n_2} = (a, b)_{n_1} + (a, b)_{n_2} + \{(a)_{n_1}(b)_{n_2}\} + \{(a)_{n_2}(b)_{n_1}\}.$$

Hierin stelt $\{(a)_{n_1}(b)_{n_2}\}$ het aantal krommen C_m voor, die C_{n_1} a-voudig en C_{n_2} b-voudig aanraken.

Zijn a en b niet te groot, dan hebben de beide bij de aanrakingsvoorwaarden $(a)_{n_1}$ en $(b)_{n_2}$ behoorende meetkundige plaatsen $G^{(\omega-a)}$ en $G^{(\omega-b)}$ in een $\omega = \frac{1}{2}m(m+3)$-dimensionale ruimte (zie § 1) een doorsnede $G^{(\omega-a-b)}$, waarvan de graad gelijk is aan het product der graden van $G^{(\omega-a)}$ en $G^{(\omega-b)}$. Zijn a en b echter grooter, dan kan de doorsnede meer dan $\omega-a-b$ dimensies verkrijgen in welk geval er een doorsnijdingsresidu van $\omega-a-b$ dimensies

overblijft. De graad daarvan heeft dan evenwel een reductie ondergaan (zie p. 21). In dat geval zijn we buiten het geldigheidsbereik der af te leiden formule.

Binnen het geldigheidsbereik is dus:

$$\{(a)_{n_1}(b)_{n_2}\} = (a)_{n_1} \cdot (b)_{n_2} = [a]_{n_1} \cdot [b]_{n_2},$$
$$\{(a)_{n_2}(b)_{n_1}\} = (a)_{n_2} \cdot (b)_{n_1} = [a]_{n_2} \cdot [b]_{n_1},$$

waarin de stippen gewone vermenigvuldigingen beteekenen.

De functionaalvergelijking wordt dus:

$$(a, b)_{n_1+n_2} - (a, b)_{n_1} - (a, b)_{n_2} = [a]_{n_1} \cdot [b]_{n_2} + [a]_{n_2} \cdot [b]_{n_1}.$$

Een particuliere oplossing hiervan luidt:

$$(a, b)_n = [a]_n \cdot [b]_n,$$

terwijl de algemeene oplossing der functionaalvergelijking zonder tweede lid is:

$$(a, b)_n = [a, b]_n,$$

waarin weer $[a, b]_n$ een homogene lineaire functie van n, Δ en $\varkappa$ voorstelt. De algemeene oplossing der functionaalvergelijking met tweede lid is dus:

$$(a, b)_n = [a]_n [b]_n + [a, b]_n.$$

Op deze wijze leidt Cayley het volgende stel vergelijkingen af (waarbij we de indices weglaten):

$$\left.\begin{aligned}
(a) &= [a] \quad, \\
(a, b) &= [a][b] + [a, b] \quad, \\
(a, b, c) &= [a][b][c] + [a][b,c] + [b][a,c] + [c][a,b] + [a,b,c], \\
(a, b, c, d) &= [a][b][c][d] + \Sigma[a][b][c, d] + \Sigma[a, b][c, d] + \\
&\qquad + \Sigma[a][b, c, d] + [a, b, c, d],
\end{aligned}\right\} \cdot (\alpha)$$

enz.,

waarin alle grootheden tusschen vierkante haakjes homogene lineaire functies van n, Δ en $\varkappa$ zijn.

CAYLEY bepaalt deze functies uit de kennis van (a), (a, b), enz. voor een rationale C_n zonder keerpunten en een rationale C_n met één keerpunt.

Is C_n een rationale kromme zonder keerpunten ($\Delta = -1, \varkappa = 0$), dan is volgens de formule van DE JONQUIÈRES voor $p = 0$:

$$(a, b, c, \ldots)\,(\text{voor } \Delta = -1, \varkappa = 0) =$$
$$(a+1)(b+1)(c+1)\ldots[mn - (a+b+c+\ldots)]^t \ldots (\beta)$$

De uitdrukking $(a, b, c, \ldots)$ voor een rationale kromme met één keerpunt ($\Delta = -1, \varkappa = 1$) bepaalt CAYLEY uit de reductie door dat keerpunt veroorzaakt, of liever veroorzaakt door de verandering van een gewoon dubbelpunt in een keerpunt. Daartoe moeten die krommen worden afgeteld, die een der aanrakingen, b.v. de a-voudige, in het keerpunt uitvoeren. Legt men nu aan C_m de a-voudige voorwaarde op door dat keerpunt en door $a-1$ oneindig dicht bij het keerpunt gelegen punten van C_n te moeten gaan, dan vallen er $a+1$ beweeglijke snijpunten van C_m en C_n in dat keerpunt samen, zoodat de C_m daar de a-voudige aanraking oneigenlijk maar wezenlijk uitvoert.

Het aantal krommen C_m, die de a-voudige aanraking in het keerpunt uitvoeren en aan de overige voorwaarden op eigenlijke wijze voldoen, wordt gevonden uit de formule van DE JONQUIÈRES [1]) voor $t-1$ vrije aanrakingen, waarbij de $a+1$ in het keerpunt vallende snijpunten als vaste snijpunten van C_m en C_n moeten worden aangemerkt, zoodat in die formule $p = a+1$ te stellen is. Het aantal dier krommen wordt dus:

---

[1]) Dat deze formule hier toepasbaar is verdient nader bewijs, hetgeen CAYLEY niet geeft. De bepaling van $(a, b, c, \ldots)$ voor een rationale kromme met één keerpunt is het zwakke punt van zijn afleiding. CAYLEY zelf zegt er van „some of the steps require however to be more completely made out" (l. c. art. 89).

$$(b+1)(c+1)\ldots[mn-(b+c+\ldots)-(a+1)]^{t-1}=$$
$$(b+1)(c+1)\ldots[mn-(a+b+c+\ldots)-1]^{t-1}.$$

Volgens CAYLEY telt ieder dier krommen (nadat de invloed van het keerpunt als gewoon dubbelpunt reeds in rekening gebracht is) voor a oplossingen [1]), zonder dat hij daar echter een nader bewijs voor levert. In § 31 zal ik aangeven hoe dit voor het geval, dat $t=1$ is, aangetoond kan worden. Is dit nu eenmaal voor $t=1$ bewezen, dan geldt hetzelfde ook voor een willekeurige waarde van t. Immers de eenige oorzaak voor de multipliciteit der oplossing ligt hierin, dat een der aanrakingen op oneigenlijke wijze in het keerpunt wordt uitgevoerd, daar toch aan de andere voorwaarden op eigenlijke wijze voldaan wordt. Wat die andere voorwaarden zijn is dan echter voor die multipliciteit onverschillig.

CAYLEY komt zoo tot het besluit, dat de krommen C_m, die een der aanrakingen in het keerpunt vertoonen, te zamen

$$\Sigma\, a(b+1)(c+1)\ldots.[mn-(a+b+c+\ldots)-1]^{t-1}$$

oplossingen absorbeeren. Bij een rationale kromme met één keerpunt ($\Delta=-1, \varkappa=1$) blijven er dus

$$(a, b, c, \ldots)\ (\text{voor } \Delta=-1, \varkappa=1)=$$
$$(a+1)(b+1)(c+1)\ldots.[mn-(a+b+c+\ldots)]^{t}-$$
$$-\Sigma\, a(b+1)(c+1)\ldots[mn-(a+b+c+\ldots)-1]^{t-1}\ldots(\gamma)$$

eigenlijke oplossingen over.

Nu is voor $t=1$:

$$(a)=[a]=An+B\Delta+C\varkappa,$$

waarin A, B en C functies van m en a zijn. Voor $\Delta=-1, \varkappa=0$ en voor $\Delta=-1, \varkappa=1$ heeft men dus volgens de vergelijkingen (β) en (γ):

---

[1]) Dit is dus de *wezenlijke multipliciteit* (zie § 26).

$$(a+1)(mn-a) \qquad = An - B \qquad ,$$
$$(a+1)(mn-a) - a = An - B + C.$$

Hieruit volgt:

$$A = (a+1)\,m,$$
$$B = a\,(a+1)\,,$$
$$C = -\,a \qquad ,$$

zoodat men heeft:

$$(a) = [a] = (a+1)\,mn + a\,(a+1)\,\Delta - a\,\varkappa,$$

of daar $\Delta = g - 1$ is:

$$(a) = (a+1)\left\{\begin{matrix} [mn-a]^1 + \\ + \qquad\qquad a\,[g]^1 \end{matrix}\right\} - a\,[\varkappa]^1 \;,$$

in overeenstemming met vergelijking (44).

Voor $t = 2$ stelt men evenzoo:

$$[a\,,b] = An + B\,\Delta + C\varkappa\,,$$

waarin A, B en C functies van m, a en b zijn. Nu is volgens (β) en (γ):

$$(a,b)\ (\text{voor } \Delta = -1,\ \varkappa = 0) = (a+1)(b+1)\,[mn-a-b]^2\,,$$
$$(a,b)\ (\text{voor } \Delta = -1,\ \varkappa = 1) = (a+1)(b+1)\,[mn-a-b]^2 - $$
$$- \Sigma\, a\,(b+1)\,(mn-a-b-1)\,.$$

Volgens de vergelijkingen ($\varkappa$) is echter:

$$[a,b] = (a,b) - [a]\,[b]\,,$$

waarin $[a]$ en $[b]$ reeds gevonden functies van n, Δ en $\varkappa$ zijn. Men vindt dus:

$$[a,b]\ (\text{voor } \Delta = -1,\ \varkappa = 0) = (a+1)(b+1)\{-mn\,(a+b+1) + $$
$$+ a^2 + b^2 + ab + a + b\} = An - B\,,$$
$$[a,b]\ (\text{voor } \Delta = -1,\ \varkappa = 1) = (a+1)(b+1)\{-mn\,(a+b+1) + $$
$$+ a^2 + b^2 + ab + a + b\} + $$
$$+ (a+1)(b+1)(a+b) - ab = An - B + C.$$

Hieruit volgt:

$$A = -(a+1)(b+1)(a+b+1)m \quad ,$$
$$B = -(a+1)(b+1)\{(a+b)(a+b+1) - ab\},$$
$$C = \quad (a+1)(b+1)(a+b) - ab \quad .$$

Voor $[a, b]$ vindt men dus:

$$[a,b] = (a+1)(b+1)\{-(a+b+1)mn - [(a+b)(a+b+1) - ab]\Delta + \\ + (a+b)\varkappa\} - ab\varkappa$$
$$= (a+1)(b+1)\{-(a+b+1)(mn - a - b) - ab - \\ - [(a+b)(a+b+1) - ab]g + (a+b)\varkappa\} - ab\varkappa,$$

en dus voor (a, b), volgens

$$(a, b) = [a]\,[b] + [a, b]:$$

$$(a, b) = (a+1)(b+1)\left\{\begin{array}{l} [mn - a - b \quad\quad]^2 + \\ + [mn - a - b - 1]^1 (a+b)\,[g]^1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad ab\,[g]^2 \end{array}\right\} - \\ - [\Sigma\, a(b+1)\left\{\begin{array}{l} [mn - a - b - 1]^1 + \\ + \quad\quad\quad\quad\quad\quad b\,[g]^1 \end{array}\right\}][\varkappa]^1 + \\ + [ab \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\

§ 29. *Uitbreiding van de formule van* CAYLEY.

CAYLEY beschouwt bij zijn uitbreiding van de formule van DE JONQUIÈRES uitsluitend het geval $p=0$, dus het geval dat geen der gegeven punten op de gegeven kromme ligt [1]). Echter ook als er gegeven punten op de gegeven kromme, mits niet in de keerpunten, vallen gaat de methode met de functionaalvergelijkingen nagenoeg onveranderd door. Men moet dan $(a, b, c, \ldots)$ als een functie van n, Δ, $\varkappa$ en p beschouwen. Bij de degeneratie van C_n in C_{n_1} en C_{n_2} komen er nu p_1 vaste snijpunten met C_m op C_{n_1} en p_2 vaste snijpunten op C_{n_2} te liggen. Men heeft dan:

$$p = p_1 + p_2 .$$

Hieruit blijkt, dat de functionaalvergelijkingen van CAYLEY onveranderd blijven en dat dus ook nu de vergelijkingen (α) van p. 173 bestaan. Op dezelfde wijze als in § 28 blijkt, dat men voor $\Delta=-1$, $\varkappa=0$ heeft:

$$(a, b, c, \ldots) = (a+1)(b+1)(c+1)\ldots[mn-(a+b+c+\ldots)-p]^t,$$

en voor $\Delta=-1$, $\varkappa=1$:

$$(a, b, c, \ldots) =$$
$$(a+1)(b+1)(c+1)\ldots[mn-(a+b+c+\ldots)-p]^t -$$
$$-\Sigma\, a(b+1)(c+1)\ldots[mn-(a+b+c+\ldots)-p-1]^{t-1}.$$

Hierin komen n en p slechts in de combinatie $mn-p$ voor, waaruit gemakkelijk is in te zien dat alle volgende afleidingen van § 28 ook nu nagenoeg ongewijzigd doorgaan. Het blijkt n.l. dat ook bij de verdere ontwikkelingen n en p nooit anders dan gecombineerd tot $mn-p$ voorkomen, zoodat men in het eindresultaat slechts mn door $mn-p=n'$ te vervangen heeft.

---

[1]) CAYLEY zegt hieromtrent (3 art. 92): „It is probable that the general formulae containing the number p admit of extensions and transformations analogous to the formulae in which p is put $=0$, but this is a question which I have not considered."

Echter ook als sommige der gegeven punten in keerpunten van C_n vallen gaat de formule met een kleine wijziging door, waarbij we ons in deze paragraaf beperken tot het geval, dat er geen twee of meer gegeven punten in een keerpunt samenvallen. Men heeft dan slechts de grootheid $\varkappa$ daar, waar ze expliciet optreedt (impliciet komt $\varkappa$ n.l. ook in het geslacht g voor), te vervangen door $\varkappa'$, het aantal der *buiten de gegeven punten gelegen keerpunten van* C_n.

Dat in de formule alleen het aantal der buiten de gegeven punten gelegen keerpunten optreedt is onmiddellijk in te zien. Zij n.l. S een in een gegeven punt vallend keerpunt. De voorwaarde, dat de C_m (waarvan steeds ondersteld wordt, dat ze door de gegeven punten gaat) aan de keerraaklijn in S raakt, m. a. w. dat C_m één beweeglijk snijpunt in S werpt, is enkelvoudig, zoodat de voorwaarde, dat er $a+1$ beweeglijke snijpunten in S vallen, dus de voorwaarde, dat een a-voudige vrije aanraking *wezenlijk* in het keerpunt S wordt uitgevoerd (zie § 26), *in het algemeen* $a+1$-voudig is. Daar de overige aanrakingsvoorwaarden te zamen een dimensie $b+c+\ldots$ hebben zal er in het algemeen geen C_m zijn, die aan de vraag voldoet en de a-voudige aanraking wezenlijk in het keerpunt S uitvoert. We vinden dus:

In het algemeen zijn er geen tot de wezenlijke behoorende oplossingen (zie § 26), *die een of meer der vrije aanrakingen in keerpunten van* C_n *uitvoeren, die tevens enkelvoudige gegeven punten zijn.*

Daar nu volgens § 27 voor een C_n met keerpunten de formule van DE JONQUIÈRES het aantal wezenlijke oplossingen aangeeft, hebben we om het aantal *eigenlijke* oplossingen (waarbij de vrije aanrakingen buiten de keerpunten worden uitgevoerd) te verkrijgen slechts die oneigenlijke oplossingen in mindering te brengen, die tot de wezenlijke oplossingen behooren. Volgens het boven gevondene kunnen hierbij de in gegeven punten vallende keerpunten van C_n geheel buiten beschouwing blijven, zoodat de vermindering, die het aantal eigenlijke oplossingen ondergaat alleen van het

aantal $\varkappa'$ der buiten de gegeven punten gelegen keerpunten afhangt.

Na deze uiteenzetting zal het duidelijk zijn, dat de bewijsvoering van CAYLEY ook voor het geval van in gegeven punten gelegen keerpunten doorgaat, mits men overal $\varkappa$ door $\varkappa'$ vervangt. Op dezelfde wijze als vroeger vindt men n.l., dat het aantal eigenlijke oplossingen voor een rationale C_n met keerpunten, waarvan er slechts één buiten de gegeven punten valt, ook dan wordt voorgesteld door

$$(a+1)(b+1)(c+1)\ldots[mn-(a+b+c+\ldots)-p]^t-$$
$$-\Sigma\, a(b+1)(c+1)\ldots[mn-(a+b+c+\ldots)-p-1]^{t-1}.$$

We vinden dus:

THEOREMA II. — *Gegeven zijn* $\frac{1}{2}m(m+3)-(a+b+c+\ldots)$ *punten en een kromme* C_n *van het geslacht* g *met geen andere superlineaire takken dan die met keerpunten, waarvan er* $\varkappa'$ *buiten de gegeven punten gelegen zijn, terwijl in geen der overige keerpunten twee of meer gegeven punten samenvallen. Het aantal* $(a, b, c, \ldots)$ *der door de gegeven punten gaande krommen* C_m, *die aan* C_n *buiten de keerpunten* t *vrije aanrakingen resp. van de orden* $a, b, c, \ldots$ *wezenlijk uitvoeren, wordt (als we kortheidshalve* $t=3$ *onderstellen) gevonden uit:*

$$\begin{aligned}
P(a,b,c) = (a+1)(b+1)(c+1)\Big\{ & [n'-(a+b+c)]^3 + \\
& + [n'-(a+b+c)-1]^2(a+b+c)[g]^1 \\
& + [n'-(a+b+c)-2]^1(ab+ac+bc)[g]^2 \\
& + abc\,[g]^3 \Big\} - \\
-[\Sigma\, a(b+1)(c+1)\Big\{ & [n'-(a+b+c)-1]^2 + \\
& + [n'-(a+b+c)-2]^1(b+c)[g]^1 \\
& + bc\,[g]^2 \Big\}][\varkappa']^1 + \\
+[\Sigma\, ab(c+1)\Big\{ & [n'-(a+b+c)-2]^1 + \\
& + c\,[g]^1 \Big\}][\varkappa']^2 - \\
-[abc &][\varkappa']^3 \quad \ldots\ldots (45)
\end{aligned}$$

Hierin stelt n' *het aantal beweeglijke snijpunten van* C_n *met de door de gegeven punten gaande krommen* C_m *voor* [1]).

---

[1]) Voor de notaties zie THEOREMA I, p. 169—170.

§ 30. *Andere afleiding der in* THEOREMA II *genoemde formule.*

Bij deze afleiding der formule zullen we gemakshalve wederom onderstellen, dat alle aanrakingsindices $a, b, c, \ldots$ verschillen en dus $P=1$ is. De formule, die we te bewijzen hebben, luidt dan voor een willekeurige waarde van t:

$$(a, b, c, \ldots)^{eig.} = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + (-1)^t A_t \text{ [1]}. \quad . \quad . \quad (46)$$

Hierin is de beteekenis van A_0, A_1, A_2, enz. door vergelijking met de formule (45) gemakkelijk te herkennen. Zoo is b.v.:

$$A_3 = [\Sigma abc(d+1)(e+1)\ldots \left\{ \begin{array}{l} [n'-(a+b+c+\ldots)-3]^{t-3} + \\ +[n'-(a+b+c+\ldots)-4]^{t-4}(d+e+\ldots)[g]^1 \\ +[n'-(a+b+c+\ldots)-5]^{t-5}(de+df+\ldots)[g]^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +[n'-(a+b+c+\ldots)-t]^0 \quad (def\ldots\ldots)[g]^{t-3} \end{array} \right\}][\varkappa']^3$$

$$= [\Sigma\, abc\,(d, e, f, \ldots)_{n'-(a+b+c)-3}]\,[\varkappa']^3,$$

waarin de index $n'-(a+b+c)-3$ het aantal beweeglijke snijpunten aangeeft.

De eerste term A_0 beteekent niets anders dan het aantal *wezenlijke oplossingen.* Hiervan moet het aantal der wezenlijke maar oneigenlijke oplossingen worden afgetrokken. Zooals we in § 29 beredeneerd hebben zijn onder deze laatste geen oplossingen, die een of meer der vrije aanrakingen in in gegeven punten vallende keerpunten van C_n uitvoeren.

De in mindering te brengen oplossingen vervallen nu in t soorten. De oplossingen van de i^{de} soort voeren i (en niet meer) vrije aanrakingen in buiten de gegeven punten vallende keerpunten van C_n uit. Het aantal oneigenlijke oplossingen der i^{de} soort, ieder

---

[1]) Ter onderscheiding schrijven we in deze paragraaf $(a, b, c, \ldots)$ voor het aantal *wezenlijke*, $(a, b, c, \ldots)^{eig.}$ voor het aantal eigenlijke oplossingen.

met haar wezenlijke multipliciteit in rekening gebracht, stellen we door B_i voor. Voor het aantal eigenlijke oplossingen blijft dan over:

$$(a, b, c, \ldots)^{eig.} = A_0 - B_1 - B_2 - B_3 - \ldots - B_t \text{ [1]} \quad . \quad (47)$$

De wezenlijke multipliciteit eener oplossing van de eerste soort, die de a-voudige aanraking in een keerpunt van C_n uitvoert, is gelijk aan a (zie p. 175). Een oplossing van de tweede soort, die de a- en de b-voudige aanraking in keerpunten S_1 en S_2 van C_n volbrengt, zal dus een wezenlijke multipliciteit ab hebben. Immers laat men de samenvallende raaklijnen van het keerpunt S_1 een weinig uiteengaan (waardoor een gewoon dubbelpunt ontstaat), dan ondergaat het geslacht van C_n daardoor geen verandering en evenmin de overige in vergelijking (43) (p. 170) voorkomende grootheden, waaruit volgt, dat het aantal wezenlijke oplossingen onveranderd blijft. De oorspronkelijke oplossing is dan echter in a verschillende wezenlijke oplossingen uiteengevallen, die nog alle de b-voudige aanraking in het keerpunt S_2 uitvoeren [2]). Dit zijn a oplossingen der eerste soort, die alle een multipliciteit b hebben en dus ab oplossingen vertegenwoordigen, die men als ab *verschillende* oplossingen voor den dag kan brengen door ook het keerpunt S_2 in een gewoon dubbelpunt te veranderen.

Op dezelfde wijze beredeneert men, dat aan een oplossing van de 3de soort, die drie aanrakingen van de orden a, b en c in keerpunten van C_n uitvoert, een wezenlijke multipliciteit abc toekomt, enz.

---

[1]) Is $\varkappa < t$, dan zullen natuurlijk $B_{\varkappa+1}, B_{\varkappa+2}, \ldots, B_t$ alle nul moeten worden.

[2]) De oorspronkelijke oplossing heeft n.l. een wezenlijke multipliciteit a als oplossing van de vraag naar de door de gegeven punten gaande krommen C_m, die de gegeven kromme in S_2 b-voudig aanraken en bovendien aan die kromme nog $t-1$ vrije aanrakingen van de orden a, c, d, enz. vertoonen.

Aangetoond moet nu worden, dat de vergelijking (46) met (47) in overeenstemming is. Daartoe gaan we na wat de beteekenis van A_i is. In

$$A_3 = [\Sigma\, a\, b\, c\, (d, e, f, \ldots)_{n'-(a+b+c)-3}]\, [\varkappa']^3$$

is $(d, e, f, \ldots)_{n'-(a+b+c)-3}$ het aantal wezenlijke oplossingen, die de a-, de b- en de c-voudige aanraking in bepaald aangewezen keerpunten van C_n uitvoeren; houdt men n.l. het a-, het b- en het c-voudige raakpunt in die keerpunten vast, dan zijn die keerpunten gegeven punten geworden, waarin resp. $a+1$, $b+1$, $c+1$ vaste snijpunten van C_m en C_n vallen, zoodat er voor het aantal beweeglijke snijpunten $n'-(a+b+c)-3$ overblijft. Daar de wezenlijke multipliciteit van ieder dier oplossingen $a\,b\,c$ is, vertegenwoordigen ze te zamen $abc(d,e,f,\ldots)_{n'-(a+b+c)-3}$ wezenlijke oplossingen. Door de drie aangewezen keerpunten dezelfde te laten maar de orden der aanrakingen, die daar worden uitgevoerd, te varieeren, vindt men voor het aantal wezenlijke oplossingen, die drie vrije aanrakingen in drie bepaald aangewezen buiten de gegeven punten gelegen keerpunten van C_n uitvoeren:

$$3!\, [\Sigma\, a\, b\, c\, (d, e, f, \ldots)_{n'-(a+b+c)-3}],$$

waarbij ook die oplossingen zijn medegeteld, die behalve de drie aanrakingen in de aangewezen keerpunten nog andere vrije aanrakingen in keerpunten van C_n volbrengen. Vermenigvuldigt men (om A_3 te krijgen) dit aantal met $\frac{[\varkappa']^3}{3!}$ (het aantal manieren, waarop men drie buiten de gegeven punten gelegen keerpunten van C_n kan aanwijzen), dan krijgt men alle wezenlijke oplossingen, die drie of meer vrije aanrakingen in keerpunten van C_n volbrengen. De oplossingen, die vier vrije aanrakingen in keerpunten van C_n uitvoeren, zijn dan echter bij vier verschillende drietallen van keerpunten medegeteld. Evenzoo zijn de oplossingen, die j $(j > 3)$ vrije aanrakingen in keerpunten van C_n uitvoeren, $\frac{j!}{3!\,(j-3)!} = (j)_3$

maal in rekening gebracht, telkens met hun wezenlijke multipliciteit, waarin $(j)_3$ de derde binominaalcoëfficient van de j^{de} macht voorstelt. Men vindt dus:

$$A_3 = B_3 + (4)_3 B_4 + (5)_3 B_5 + \ldots + (t)_3 B_t.$$

Algemeener heeft men:

$$A_i = (i)_i B_i + (i+1)_i B_{i+1} + (i+2)_i B_{i+2} + \ldots + (t)_i B_t.$$

Drukt men nu met behulp van deze formule de A's van vergelijking (46) in de B's uit, dan gaat die vergelijking over in:

$$(a, b, c, \ldots)^{eig.} = A_0 + s_1 B_1 + s_2 B_2 + s_3 B_3 + \ldots + s_t B_t,$$

waarin s_j een getallenfactor is, die gelijk is aan:

$$s_j = -(j)_1 + (j)_2 - (j)_3 + \ldots + (-1)^j (j)_j.$$

Uit:

$$0 = (1-1)^j = 1 - (j)_1 + (j)_2 - (j)_3 + \ldots + (-1)^j (j)_j$$

volgt dan verder dat $s_j = -1$ is, dus:

$$(a, b, c, \ldots)^{eig.} = A_0 - B_1 - B_2 - B_3 - \ldots - B_t .$$

Hiermede is de overeenstemming tusschen de vergelijkingen (46) en (47) aangetoond en dus de juistheid van vergelijking (46) bewezen.

Opmerking. Men kan bij deze afleiding nog eenigszins anders te werk gaan, waardoor men nog beter ziet hoe de formule (46) voor den dag komt. We bewijzen de formule eerst voor $t = 1$, hetgeen onmiddellijk verricht is, daar het aantal in mindering te brengen oplossingen dan $\varkappa'$ bedraagt, ieder met een multipliciteit a. Uit de formule voor $t = 1$ bewijzen we die voor $t = 2$; daaruit de formule voor $t = 3$, enz. We kunnen dus de juistheid der formule (46) voor $t - 1$ (of minder) vrije aanrakingen aannemen en hebben dan de juistheid dier formule voor t vrije aanrakingen te bewijzen.

Het aantal wezenlijke maar oneigenlijke oplossingen der eerste

soort (die één en niet meer vrije aanrakingen in keerpunten van C_n uitvoeren) wordt uit de formule (46) voor $t-1$ vrije aanrakingen gevonden. Hierbij moet men bedenken, dat bij de bepaling van het aantal oplossingen, die de a-voudige aanraking in een buiten de gegeven punten gelegen keerpunt S van C_n uitvoeren, dit keerpunt voor $a+1$ vaste snijpunten telt en dus niet meer als een buiten de gegeven punten gelegen keerpunt behandeld moet worden [1]), zoodat n' door $n'-a-1$ en $\varkappa'$ door $\varkappa'-1$ moet worden vervangen. Op deze wijze vindt men:

$$B_1 = (1)_1 A_1 - (2)_1 A_2 + (3)_1 A_3 - \ldots + (-1)^{t-1} (t)_1 A_t \,.$$

Bij de bepaling van het aantal oplossingen van de tweede soort (met twee in keerpunten uitgevoerde aanrakingen) heeft men in de formule (46) t door $t-2$, $\varkappa'$ door $\varkappa'-2$ en n' door $n'-(a+b)-2$ te vervangen, als a en b de orden der in keerpunten uitgevoerde aanrakingen zijn. Men vindt dan:

$$B_2 = (2)_2 A_2 - (3)_2 A_3 + (4)_2 A_4 - \ldots + (-1)^{t-2} (t)_2 A_t$$

en in het algemeen:

$$B_i = (i)_i A_i - (i+1)_i A_{i+1} + (i+2)_i A_{i+2} - \ldots + (-1)^{t-i} (t)_i A_t.$$

Door met deze formule uit vergelijking (47) de B's te verdrijven vindt men gemakkelijk:

$$(a, b, c, \ldots)^{eig.} = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + (-1)^t A_t \,,$$

waarmede dan de formule (46) voor t vrije aanrakingen is aangetoond.

Uit het oogpunt van strengheid en eenvoudigheid is echter het eerst gegeven bewijs te verkiezen, hoewel men daarbij van de te bewijzen formule uitgaat zonder dat men die formule geleidelijk ziet ontstaan.

---

[1]) Men overtuigt zich n.l. gemakkelijk, dat een keerpunt van C_n, waarin uitsluitend door verschuiving langs C_n eenige gegeven punten zijn samengevallen, evenzoo behandeld moet worden als een keerpunt, waarin slechts één gegeven punt valt (zie p. 195).

§ 31. *Verdere strekking der formule* (45).

In de vorige paragrafen hebben we ondersteld, dat geen twee of meer gegeven punten in een keerpunt van C_n samenvallen. Echter ook als dit wel plaats vindt en ook als het gaan door gegeven punten door de algemeenere voorwaarde wordt vervangen, dat de coëfficienten van C_m aan eenige lineaire betrekkingen voldoen, gaat de vergelijking (45) (p. 180) in een groot aantal gevallen onveranderd door.

We beginnen onze beschouwingen met het geval, dat het aantal t der voorgeschreven aanrakingen één is en dus gevraagd wordt naar het aantal krommen C_m van een lineair stelsel van de a^{de} orde, die een gegeven C_n buiten de meervoudige punten van C_n en de vaste punten van het stelsel a-voudig aanraken. Voor dat geval heb ik het aanrakingsprobleem met het volgende theorema opgelost, waarvan ik elders een bewijs hoop te leveren:

„*Gegeven zij een algebraïsche kromme van het geslacht g, die geen meermalen tellende takken bevat, en een lineair stelsel van de a^{de} orde van krommen, die de vaste kromme in n' beweeglijke punten snijden en geen van alle geheel of gedeeltelijk met de vaste kromme samenvallen. Het aantal beweeglijke snijpunten door de verschillende krommen van het stelsel langs een tak T van C_n in den oorsprong S van dien tak geworpen*[1]) *is voor a verschillende waarden vatbaar, die naar grootte gerangschikt $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_a$ mogen zijn. Tusschen deze grootheden bestaat de volgende betrekking:*

---

[1]) We zeggen, dat een kromme van het stelsel i beweeglijke snijpunten in den oorsprong S van een tak T van C_n werpt, als een naburige kromme van het stelsel i op den tak T dicht bij S gelegen snijpunten oplevert. In het volgende zullen we, van den *oorsprong van een tak van C_n* sprekend, alleen op dien eenen tak letten en niet op eventueele andere takken, die hun oorsprong in hetzelfde punt hebben; spreken we daarentegen van een *punt van C_n*, dan beschouwen we alle takken, die dat punt tot oorsprong hebben.

$$\Sigma\{r_1 + r_2 + \ldots + r_a - \tfrac{1}{2}a(a+1)\} = (a+1)(n'+ag-a), \quad (48)$$

waarin het Σ-teeken een sommeering beteekent over alle oorsprongen van takken der vaste kromme, waarvoor $r_1 + r_2 + \ldots + r_a > \frac{1}{2}a(a+1)$ *is, en over zooveel andere oorsprongen van takken als men wil.*"

Dit theorema geldt (behoudens de in het theorema zelf genoemde natuurlijke beperking) welke bijzonderheden zich ook bij het lineaire stelsel, bij de gegeven kromme en bij de ligging der gegeven kromme ten opzichte van het lineaire stelsel mogen voordoen.

Het merkwaardige van dit theorema is wel daarin gelegen, *dat alle in de vergelijking* (48) *voorkomende grootheden rationaal-invariant zijn.*

Het tweede lid dier vergelijking stelt het aantal *wezenlijke oplossingen* van het aanrakingsprobleem voor, ten minste als we onder een oplossing niet de gevraagde kromme maar het a-voudige raakpunt verstaan [1]). Uit die vergelijking volgt dus, *dat de wezenlijke multipliciteit van den oorsprong S van een tak van* C_n *als oplossing gelijk is aan*:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_a - \tfrac{1}{2}a(a+1).$$

Hieruit volgt weder dat die wezenlijke multipliciteit alleen van de getallen $r_1, r_2, \ldots, r_a$, die we de *raakgetallen* noemen, afhangt. In het bijzonder noemen we r_1 het *eerste raakgetal*, waaronder we dus te verstaan hebben *het kleinste van nul verschillende aantal beweeglijke snijpunten met* C_n *door de onderscheidene krommen van het stelsel in S geworpen.* Daarentegen stelt het a^{de} raakgetal of

---

[1]) Het aantal der a-voudige raakpunten en dat der krommen C_m valt natuurlijk in het algemeen te zamen. Bestaat er echter op C_n een oorsprong voor welken $r_{a-1} \geq a+1$ is, dan voldoen oneindig veel krommen, die alle in dezen oorsprong de C_n a-voudig aanraken. Het tweede lid van verg. (48) stelt dan niet meer het aantal oplossingen voor indien men daaronder de krommen zelve, wel echter zoo men daaronder de a-voudige raakpunten verstaat.

r_a het grootste aantal in S vallende beweeglijke snijpunten voor.

Voor een willekeurig punt S van C_n b.v. zal $r_i = i$ zijn, dus de wezenlijke multipliciteit *nul*, zooals ook van zelf spreekt, daar het grootste aantal in S geworpen beweeglijke snijpunten a (dus minder dan $a+1$) bedraagt en S dus geen wezenlijke oplossing is. Voor een punt S, dat een oplossing is zonder dat zich verder eenige bijzonderheid voordoet, zal $r_1 = 1$, $r_2 = 2, \ldots, r_{a-1} = a - 1, r_a = a + 1$, dus de wezenlijke multipliciteit *één* zijn. Is S een vast punt van het lineaire stelsel, dan is in het algemeen $r_i = i$ en dus de wezenlijke multipliciteit *nul*, en dit blijft zoo ook dan nog wanneer in S meerdere vaste punten samengevallen zijn, zoodat daar ter plaatse de raaklijn, of de raaklijn en de kromtestraal, enz. der krommen C_m voorgeschreven zijn.

Is S een keerpunt der C_n maar geen vast punt van het lineaire stelsel, dan is in het algemeen $r_i = i + 1$, dus de wezenlijke multipliciteit gelijk aan a [1]), in overeenstemming met de bewering van CAYLEY (zie p. 175).

Is S daarentegen een keerpunt van C_n maar tevens een enkelvoudig vast punt van het lineaire stelsel, dan is in het algemeen $r_i = i$ en dus de wezenlijke multipliciteit *nul*.

Vallen eindelijk in S, als keerpunt van C_n, meerdere vaste punten samen, dan doen zich verschillende gevallen voor, die wij later bespreken (zie p. 194 en 195).

Uit een en ander volgt, dat in het geval van gegeven punten, waarvan er geen twee of meer in keerpunten van C_n samenvallen, en in de onderstelling, dat C_n geen andere oorsprongen van superlineaire takken dan keerpunten heeft, waarvan er $\varkappa$ buiten de gegeven punten vallen, het aantal eigenlijke oplossingen in het algemeen

$$(a) = (a + 1)(n' - a + ag) - a\varkappa' \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

---

[1]) Dit is het bewijs, waarop we in § 28 (p. 175) doelden.

bedraagt [1]), in overeenstemming met vergelijking (45) voor $t=1$.

Uit het feit, dat de wezenlijke multipliciteit alleen van de raakgetallen afhangt, vloeien nu voor het meer algemeene geval van een lineair stelsel en een gegeven kromme met hoogere singulariteiten onmiddellijk de beide volgende regels voort, waarvan de eerste van zelf sprekend is:

I. *De oorsprong van een* (al of niet singulieren) *tak van C_n, waarin geen der krommen van het lineaire stelsel meer dan a beweeglijke snijpunten werpt, moet in de vergelijking* (49) *evenzoo behandeld worden als een keerpunt, waarin één enkel gegeven punt valt.*

II. *De oorsprong van een tak van C_n, waarin geen der krommen van het stelsel één enkel beweeglijk snijpunt alleen noch ook meer dan $a+1$ beweeglijke snijpunten werpt* [2]), *moet behandeld worden als een buiten de gegeven punten gelegen keerpunt en heeft dus een wezenlijke multipliciteit a.*

We zullen de onder I en II genoemde oorsprongen gemakshalve als *oorsprongen van de eerste* en *van de tweede soort* aanduiden. Voor een oorsprong van de eerste soort is derhalve $r_i=i$, voor een oorsprong van de tweede soort $r_i=i+1$.

Een oorsprong van een tak van C_n, die òf een meervoudig punt [3]) van C_n òf een vast punt van het lineaire stelsel is, noemen we *bijzonder of bijzonder gelegen.* Wanneer nu C_n geen andere bijzondere of bijzonder gelegen oorsprongen dan die van de eerste en van de tweede soort heeft, zal de vergelijking (49) het aantal eigenlijke oplossingen blijven voorstellen, *mits men onder $\varkappa'$ het*

---

[1]) Immers wordt krachtens de op p. 161 gegeven definitie het aantal eigenlijke oplossingen gevonden door van dat der wezenlijke oplossingen dat der wezenlijke maar oneigenlijke ieder met haar wezenlijke multipliciteit af te trekken.

[2]) Dit wil dus zeggen dat het eerste raakgetal *twee* bedraagt en de daar op volgende telkens met de eenheid toenemen.

[3]) Zie noot 2 p. 157.

aantal bijzondere of bijzonder gelegen oorsprongen van de tweede soort versta. De bovengenoemde beperking komt op het volgende neer:

De vergelijking (49) *is juist in de onderstelling, dat geen enkele kromme van het stelsel in een bijzonderen of bijzonder gelegen oorsprong van C_n meer dan a beweeglijke snijpunten werpt als het eerste raakgetal voor dien oorsprong één is en in elk geval niet meer dan $a+1$ beweeglijke snijpunten.*

Immers volgt hieruit onmiddellijk dat slechts oorsprongen van de eerste of van de tweede soort in de bijzondere of bijzonder gelegen punten aanwezig ondersteld worden. Het eerste raakgetal mag daar ter plaatse dus niet zijn drie of meer, noch ook mogen er sprongen van meer dan eene eenheid in de opvolgende raakgetallen voorkomen.

Keeren we nu tot het algemeene geval terug, waarbij het aantal t der voorgeschreven aanrakingen willekeurig is. We maken hierbij direct de onderstelling, *dat C_n geen andere bijzondere of bijzonder gelegen oorsprongen heeft dan die, waarvoor het eerste raakgetal* [1]) *de waarde één of twee heeft.* Deze oorsprongen zullen we gemakshalve als oorsprongen S resp. S' aanwijzen; zij $\varkappa'$ het aantal dier oorsprongen S'. Verder nemen we aan, dat er geen krommen C_m aan de vraag voldoen, die geheel of gedeeltelijk uit samenvallende deelen bestaan (zie § 24).

Regel II laat zich nu op de volgende wijze op het geval, dat t willekeurig is, overdragen:

III. *Een kromme C_m, die wezenlijk aan de vraag voldoet, en de a-voudige aanraking in een oorsprong met een eerste raakgetal twee* (oorsprong S') *zoodanig uitvoert, dat er $a+1$ en niet meer beweeg-*

---

[1]) De voor het eerste raakgetal gegeven definitie (zie p. 187) gaat onveranderd door als t een willekeurige waarde heeft.

lijke snijpunten in dien oorsprong vallen, heeft tengevolge daarvan een wezenlijke multipliciteit a [1]).

We willen nu nagaan onder welke omstandigheden de formule (45) voor de nieuwe beteekenis van $\varkappa'$ juist blijft. Daartoe hebben we met elkaar te vergelijken de multipliciteit, waarmede een wezenlijke maar oneigenlijke oplossing in de formule (45) blijkens hare afleiding van § 30 in rekening is gebracht en de wezenlijke multipliciteit, die in werkelijkheid aan die oplossing toekomt. Beschouwen we een kromme C_m, die wezenlijk aan de vraag voldoet en waarvan we eenvoudigheidshalve aannemen dat ze slechts twee der aanrakingen in oorsprongen S' uitvoert, n.l. een a-voudige aanraking in S'_1 en een b-voudige in S'_2. De wezenlijke multipliciteit dezer oplossing is $(a+a')(b+b')u$, waarin $a+a'$ de multipliciteit is tengevolge van de manier waarop de aanraking in S'_1 wordt uitgevoerd, $b+b'$ die tengevolge van de aanraking in S'_2 en u die tengevolge der overige aanrakingen. Hierin is volgens den onder III gegeven regel $a'=0$ als er $a+1$ en niet meer beweeglijke snijpunten in den oorsprong S'_1 vallen, dus als de aanraking *niet-overmatig* [2]) wordt uitgevoerd.

In de vergelijking (46) komt deze oplossing dus onder A_0 voor met een multipliciteit $(a+a')(b+b')u$, onder A_1 met een multipliciteit $a(b+b')u+b(a+a')u$ en onder A_2 met een multipliciteit abu, terwijl die oplossing onder A_3, A_4, enz. niet voorkomt. Derhalve komt in het tweede lid dier vergelijking de oplossing nog voor met een multipliciteit

$$(a+a')(b+b')u - a(b+b')u - b(a+a')u + abu = a'b'u.$$

Hieruit blijkt dat om met die oplossing rekening te houden ze met een *extra-multipliciteit* $a'b'u$ in mindering gebracht moet

---

[1]) Komt aan die oplossing om een andere reden een multipliciteit v toe, dan wordt haar totale wezenlijke multipliciteit gelijk aan av.

[2]) Zie omtrent de definitie noot 3 pag. 157.

worden. De vergelijking (46) blijft dus juist na aanbrenging eener *correctie* (waarvan het bedrag van het door de formule opgeleverde aantal moet worden afgetrokken). In deze correctie komen de wezenlijke maar oneigenlijke oplossingen met hun extra-multipliciteit voor, die blijkens het boven gevondene verkregen wordt als het product der extra-multipliciteiten a' en b' veroorzaakt door de beide in oorsprongen S' uitgevoerde aanrakingen en de multipliciteit u tengevolge der overige aanrakingen. Ditzelfde blijft onveranderd doorgaan voor het geval, dat er meer dan twee vrije aanrakingen in oorsprongen S' worden uitgevoerd ook dan als er meerdere aanrakingen in eenzelfden oorsprong S' worden volbracht; deze in eenzelfden oorsprong uitgevoerde aanrakingen geven dan één enkele onsplitsbare extra-multipliciteit. We vinden dus:

De extra-multipliciteit of de multipliciteit, waarmede een wezenlijke maar oneigenlijke oplossing in de correctie optreedt, is gelijk aan het product der extra-multipliciteiten afkomstig van de bijzondere of bijzonder gelegen oorsprongen met een eerste raakgetal twee (oorsprongen S'), *waarin vrije aanrakingen worden uitgevoerd, en de multipliciteit tengevolge der overige aanrakingen.*

De extra-multipliciteit der oneigenlijke oplossing is nul, m. a. w. die oplossing komt in de correctie niet voor, zoodra een der samenstellende extra-multipliciteiten nul is, hetgeen het geval is als minstens een der aanrakingen wezenlijk maar niet-overmatig in een oorsprong S' wordt uitgevoerd. De vergelijking (46) (of (45) als $t = 3$ is) is onveranderd juist als de correctie nul is, dus als de extra-multipliciteit van *alle* wezenlijke maar oneigenlijke oplossingen *nul* is.

Ook blijft die vergelijking nog juist als het aantal wezenlijke oplossingen oneindig wordt en de vergelijking (43) (p. 170), welke het totale aantal der wezenlijke oplossingen aangeeft, dus haar beteekenis verliest, *mits slechts het aantal eigenlijke oplossingen eindig zij.* Dit oneindig groot worden van het aantal wezenlijke maar oneigenlijke oplossingen kan veroorzaakt worden door het samenvallen

van oorsprongen van superlineaire takken. Heeft C_n b.v. een viervoudig punt P met twee aan twee samenvallende raaklijnen, zoodat twee takken van C_n in P een keerpunt vertoonen, dan zal bij de vraag naar de dubbelraaklijnen iedere door P gaande rechte wezenlijk aan de vraag voldoen. Om een probleem te krijgen, waarbij ook het aantal groepen van raakpunten oneindig groot wordt heeft men slechts het aantal vrije aanrakingen te vermeerderen, en dus b.v. te vragen naar de cirkels, die C_n driemaal enkelvoudig aanraken. Van deze vraag is iedere door P gaande cirkel, die C_n buiten P aanraakt, een wezenlijke maar oneigenlijke oplossing; men kan nu ieder punt van C_n als derde raakpunt kiezen. In dergelijke gevallen is de formule (45) nog steeds geldig.

Daarentegen moet het aantal *eigenlijke oplossingen* natuurlijk eindig blijven wil de vergelijking (45) haar beteekenis blijven behouden. Zoo mag derhalve C_n geen oorsprong hebben, die niet bijzonder of bijzonder gelegen is maar voor welke toch $r_{a-1} \geq a+1$ is [1]), waarin a een der aanrakingsindices voorstelt. Dan immers kan men oneindig veel krommen aanbrengen in dezen oorsprong a-voudig rakende, die aan de vraag voldoen en van wier b, c-, enz.-voudige raakpunten er nog een of meer willekeurig kunnen gekozen worden.

Nu met het voorafgaande nauwkeurig de gevallen zijn onderzocht, waaronder de vergelijking (45) van kracht is, kunnen we het volgende theorema uitspreken, dat als een uitbreiding van THEOREMA II te beschouwen is:

THEOREMA III. — *Bij de vraag naar het aantal krommen van een lineair stelsel van de* $(a+b+c+\ldots)^{de}$ *orde, die aan een gegeven kromme* C_n *t vrije aanrakingen van de orden* $a, b, c, \ldots$ *uitvoeren, wordt het aantal* $(a, b, c, \ldots)$ *der eigenlijke oplossingen* [2]), *zoolang dit*

[1]) Hierin is weer r_{a-1} het a—1ste der reeks van getallen, die aangeven hoeveel beweeglijke snijpunten door de krommen van het stelsel in den oorsprong van den tak geworpen kunnen worden.

[2]) Voor de definitie zie p. 161.

eindig is, door de vergelijking (45) [1]) *van* THEOREMA II (p. 180) *aangegeven, waarin nu* $\varkappa'$ *het aantal der bijzondere of bijzonder gelegen* [2]) *oorsprongen van takken van* C_n *voorstelt, waarvoor het eerste raakgetal* [3]) *twee is; hierbij is echter ondersteld, dat er geen andere wezenlijke maar oneigenlijke oplossingen zijn dan die, welke minstens één der aanrakingen niet-overmatig* [4]) *in een dier* $\varkappa'$ *oorsprongen uitvoeren* [5]).

Alles, waarvan in dit theorema sprake is, is rationaal-invariant behalve het begrip „bijzondere of bijzonder gelegen oorsprong." Dit laatste maakt dat bij een birationale transformatie een eigenlijke oplossing in een oneigenlijke kan overgaan en omgekeerd.

Lichten we het theorema III nog door enkele eenvoudige voorbeelden toe, die betrekking hebben op keerpunten, waarin op bepaalde wijze eenige gegeven punten zijn samengevallen. Hierbij zullen we steeds onderstellen dat er zich geen andere dan de uitdrukkelijk genoemde bijzonderheden voordoen.

Vallen in een keerpunt S van C_n twee gegeven punten samen (zoodat in dit keerpunt de raaklijn aan C_m is voorgeschreven, welke raaklijn al of niet de keerraaklijn zijn kan), dan heeft de C_m, die een of meer beweeglijke snijpunten in S werpt, in S een gewoon

---

[1]) Hiermede is natuurlijk bedoeld de overeenkomstige vergelijking voor een willekeurige waarde van t, waarvan de samenstelling uit de vergelijking (45), waarin $t = 3$ ondersteld is, gemakkelijk te herkennen is.

[2]) Voor de definitie zie p. 189.

[3]) Zie p. 187.

[4]) Zie noot 3 p. 157.

[5]) In deze onderstelling ligt opgesloten, dat C_n geen bijzondere of bijzonder gelegen oorsprongen met een eerste raakgetal *drie* heeft, daar er dan oneigenlijke oplossingen zouden zijn, die alle t de aanrakingen buiten deze $\varkappa'$ oorsprongen uitvoeren. Tevens ligt er in opgesloten, dat de in § 24 besproken bijzonderheid (dat er krommen aan de vraag voldoen, die geheel of gedeeltelijk uit samenvallende deelen bestaan) zich niet voordoet, daar dit eveneens tot oneigenlijke oplossingen zoude voeren, die alle vrije aanrakingen buiten de $\varkappa'$ oorsprongen volbrengen.

dubbelpunt, waarvan de beide raaklijnen in beide gevallen van de keerraaklijn verschillen, zoodat S een vier-voudig snijpunt van C_m en C_n is. Hieruit volgt, dat het eerste raakgetal gelijk is aan *één* als de verbindingslijn der beide in S vallende gegeven punten wel, en gelijk aan *twee* als die verbindingslijn niet met de keerraaklijn samenvalt. Alleen in het laatste geval moet het keerpunt onder het aantal $\varkappa'$ worden medegeteld.

Vallen in een keerpunt S drie gegeven punten zoodanig samen, dat in S de raaklijn l en de kromming van C_m gegeven is, dan heeft de C_m, die een of meer beweeglijke snijpunten in S werpt, in S een gewoon dubbelpunt, waarvan l een der dubbelpuntsraaklijnen is. Hieruit blijkt, dat het eerste raakgetal *twee* is, onverschillig of l al dan niet met de keerraaklijn samenvalt. In beide gevallen moet het keerpunt als een buiten de gegeven punten gelegen keerpunt behandeld worden en dus onder het aantal $\varkappa'$ worden medegeteld.

Vallen de drie gegeven punten door verschuiving langs C_n in het keerpunt S samen, dan beteekent dit, dat C_m in S een gewoon dubbelpunt moet hebben; in dat geval zal bij een C_m, die een of meer beweeglijke snijpunten in S werpt, een der dubbelpuntsraaklijnen met de keerraaklijn samenvallen, zoodat het eerste raakgetal *één* is. Het keerpunt moet nu niet onder het aantal $\varkappa'$ worden medegeteld.

Deze voorbeelden laten zich gemakkelijk vermeerderen met gevallen, waarbij er vier of meer gegeven punten in een keerpunt van C_n samenvallen. Als algemeenen regel heeft men o. a.:

Zijn in een keerpunt van C_n de aldaar samengekomen gegeven punten allen door verschuiving langs C_n samengevallen, dan is het eerste raakgetal gelijk aan é é n, zoodat zulk een keerpunt behandeld moet worden als een keerpunt, waarin slechts één gegeven punt valt [1].

---

[1]) Van dezen regel hebben we reeds op p. 185 gebruik gemaakt.

Maken we ten slotte van de vergelijking (45) enkele toepassingen op de bepaling van aantallen kegelsneden, waarbij de gegeven kromme ondersteld wordt geen hoogere singulariteiten dan keerpunten te vertoonen.

Om het aantal $(\overline{2\,\varkappa\,1}\,,2)$ [1]) te vinden heeft men $t=1$, $a=2$ $n'=2n-3$ en $\varkappa'=\varkappa-1$ te stellen. Men vindt dan, daar $2g=k+\varkappa-$ $-2n+2$ is:

$$(\overline{2\,\varkappa\,1}\,,2)=3k+\varkappa-7=a-7\,,$$

in overeenstemming met CAYLEY (3 *Phil. Trans. Vol.* 158, *Coll. Pap. Vol.* 6, art. 72).

Ter bepaling van $(\overline{1\,\varkappa\,1},2,2)$ heeft men $t=2, a=b=2, n'=2n-2$ en $\varkappa'=\varkappa-1$ te stellen. Door g te verdrijven vindt men dan, daar nu $P=2$ is:

$$\begin{aligned}2\,(\overline{1\,\varkappa\,1}\,,2\,,2)&=(3k+\varkappa)^2+54n-96k-48\varkappa+74\\&=a^2+48k+54n-48a+74\,,\end{aligned}$$

eveneens met de opgave van CAYLEY (l. c. art. 73) in overeenstemming.

Zooals reeds is opgemerkt geeft de formule (45) evenals de formule van DE JONQUIÈRES alleen dan het aantal *eigenlijke* oplossingen aan als er geen krommen C_m aan de vraag voldoen, die geheel of gedeeltelijk uit samenvallende deelen bestaan (zie § 24 p. 142 en deze § p. 194). Doet deze bijzonderheid zich wel voor, dan kan de formule door het aanbrengen eener *correctie* juist gemaakt worden, welke correctie zich alleen dan rechtstreeks bepalen laat als het aantal dier gedegenereerde oplossingen eindig is. Voor $m=2$ heb ik in een aantal gevallen deze correctie berekend.

Als voorbeeld hiervan bepalen we het aantal $(\overline{2}\,,1\,,2)$. Dan is $t=2$, $a=1$, $b=2$, $n'=2n-2$ en $\varkappa'=\varkappa$, zoodat de vergelijking (45) voor dit aantal oplevert:

---

[1] Zie voor de hier volgende notaties $(\overline{2\,\varkappa\,1})$, $(\overline{1\,\varkappa\,1})$ en $(\overline{2})$ § 12, p. 80.

$$(2n+k)(3k+\varkappa)-48k-18\varkappa+72=\alpha(2n+k-18)+6k+72.$$

Hieronder zijn nu echter nog de volgende oneigenlijke oplossingen medegeteld:

1°. Ieder der $k-2$ raaklijnen uit het punt F van C_n, waarin beide gegeven punten samenvallen, aan C_n getrokken voldoet als dubbelrechte (in twee samenvallende rechten gedegenereerde kegelsnede) oneigenlijk aan de vraag en wel $n-3$ maal (telkens met een nog te bepalen multipliciteit x), daar ze in het raakpunt een drievoudige (dus een overmatige twee-voudige) aanraking en in de $n-3$ overige snijpunten enkelvoudige aanrakingen uitvoert. Dit geeft $x(k-2)(n-3)$ oneigenlijke oplossingen.

2°. Ieder der $\varkappa$ verbindingslijnen van F met de keerpunten van C_n vertoont als dubbelrechte in het keerpunt een overmatige aanraking van de 2de orde [1]) en in ieder der $n-3$ overige snijpunten aanrakingen van de 1ste orde. Ieder dier dubbelrechten is dus $n-3$ maal een oplossing telkens met een multipliciteit y. Dit geeft $y\varkappa(n-3)$ oneigenlijke oplossingen.

De correctie bedraagt dus:

$$x(k-2)(n-3)+y\varkappa(n-3)=y\alpha(n-3)+(x-3y)k(n-3)-2x(n-3).$$

Voor het aantal eigenlijke oplossingen blijft derhalve over:

$$\alpha\{(2-y)n+k-3(6-y)\}+kn(x-3y)+$$
$$+3k(2+x-3y)+2xn+6(12-x).$$

Dit aantal moet onveranderd blijven bij reciproke transformatie dus bij verwisseling van n en k, waaruit volgt, dat $y=1$ en $x=3$ is. Men vindt dus:

$$(\bar{2},1,2)=(n+k-15)\alpha+6(n+k)+54$$
$$=(n+k)(3k+\varkappa)+6n-39k-15\varkappa+54. \text{ (l.c. art. 69)}$$

) Volgens THEOREMA III wordt het optreden dier dubbelrechten in de correctie daardoor veroorzaakt, dat de aanraking in het keerpunt *overmatig* wordt uitgevoerd.

De resultaten, die ik op soortgelijke wijze verkregen heb en die ik elders hoop mede te deelen, zijn met één uitzondering in overeenstemming met die van CAYLEY (l. c. art. 62—73). Ik heb n.l. gevonden:

$$(\overline{1\varkappa 1}, 1, 3) = 6k^2 + 6nk - 8n^2 + 62n - 84k + 51 + 3(2n + k - 16)\varkappa,$$

terwijl CAYLEY (l. c. art. 73) daarvoor een waarde opgeeft, die $2(n-3)$ grooter is. In zijne opgave is blijkbaar de dubbeltellende raaklijn in het vaste keerpunt mede opgenomen. Deze werpt vier beweeglijke snijpunten in dit keerpunt en voert daar dus de 3-voudige aanraking wezenlijk uit, terwijl ze in ieder der $n-3$ overige snijpunten een enkelvoudige aanraking volbrengt. De dubbelrechte vertegenwoordigt derhalve $n-3$ verschillende oneigenlijke maar wezenlijke oplossingen, die echter nog alle dubbel tellen. Deze oplossingen voeren geen der aanrakingen in een bijzonderen of bijzonder gelegen oorsprong met een eerste raakgetal twee uit, zoodat ze volgens THEOREMA III niet uit de formule (45) verwijderd zijn.

De onjuistheid der uitkomst van CAYLEY heb ik aan het voorbeeld $n = 4, k = 3, \varkappa = 3$ rechtstreeks kunnen aantoonen. In dat geval zouden er n.l. volgens de opgave van CAYLEY *twee* eigenlijke oplossingen zijn, terwijl ik heb kunnen aantoonen dat er geen enkele is, in overeenstemming met mijne formule voor $(\overline{1\varkappa 1}, 1, 3)$.

LITERATUUROPGAVE.

(De tusschen haakjes vermelde pagina's geven aan waar de stukken in den tekst vermeld of besproken worden; stukken, waarbij deze opgave ontbreekt, zijn niet besproken).

A. Quasi-geometrische beschouwingen.

1. G. SALMON. On some points in the theory of elimination. *Quarterly Journal of Mathematics, Vol.* 7 (1866), p. 327—337. — (p. 19).
2. G. SALMON. On the number of surfaces of the second degree which can be described to satisfy nine conditions. *Quart. Journ. of Math., Vol.* 8 (1866), p. 1—7. — (p. 19).
3. A. CAYLEY. On the curves which satisfy given conditions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol.* 158 (1868), p. 75—143; *Collected Mathematical Papers, Vol.* 6, p. 191—262; spec. art. 1—23. — (p. 3, 16, 19, 29, 32, 40, 46, 47, 67, 75, 79, 81, 125, 129, 148, 170, 174, 178, 195, 197).
4. A. CAYLEY. A memoir on abstract geometry. *Phil. Transactions, Vol.* 160 (1870), p. 51—63; *Coll. Math. Papers, Vol.* 6, p. 456—469. — (p. 19, 20).
5. H. DE VRIES. Anwendung der Cyklographie auf die Lehre von den ebenen Curven. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Deel* 8 (1904), n⁰. 7; 57 p. — (p. 34, 35, 36, 37, 38, 39). (Zie ook n⁰. 59).

B. Voorloopers der karakteristiekentheorie
(met gedeeltelijk onjuiste resultaten).

6. J. STEINER. Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung. *Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd.* 32 (1846), p. 300—304.

7. J. STEINER. Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte. *Crelle's Journal, Bd.* 37 (1848), p. 161—192, spec. p. 188—189.
8. J. STEINER. Aufgaben und Lehrsätze. *Crelle's Journal, Ba.* 45 (1853), p. 183—185.
9. J. STEINER. Aufgaben und Lehrsätze. *Crelle's Journal, Bd.* 49 (1855), p. 273—278, spec. p. 273—276.
10. J. STEINER. Vermischte Sätze und Aufgaben. *Crelle's Journal, Bd.* 55 (1858), p. 356—378, spec. p. 376—377.
11. J. N. BISCHOFF. Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven. *Crelle's Journal, Bd.* 56 (1859), p. 166—177.
12. E. DE JONQUIÈRES. Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque. *Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville,* (2) *t.* 6 (1861), p. 113—134. — (p. 3, 100, 112, 113).
13. E. DE JONQUIÈRES. Note au sujet d'un article publié dans le Journal de Mathématiques tome VI, 2e série. *Journal de Liouville,* (2) *t.* 8 (1863), p. 71—72. — (p. 100).
(Zie ook n⁰. 22, 22*, 33, 33*, 34, 97).

C. CHASLES' *karakteristiekentheorie der kegelsneden.*

14. M. CHASLES. Détermination du nombre des sections coniques qui doivent toncher cinq courbes données d'ordre quelconque ou satisfaire à diverses autres conditions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t.* 58 (1864), p. 222—226.
15. M. CHASLES. Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions. Nombre des solutions dans chaque question. *Comptes Rendus, t.* 58, p. 297—308 (15 février 1864). — (p. 40, 63, 97).
16. M. CHASLES. Systèmes de coniques qui coupent des coniques données sous des angles donnés, ou sous des angles indéterminés, mais dont les bissectrices ont des directions données. *Comptes Rendus, t.* 58, p. 425—431.
17. M. CHASLES. Questions dans lesquelles il y a lieu de tenir compte des points singuliers des courbes d'ordre supérieur. Formules générales comprenant la solution de toutes les questions relatives aux

sections coniques. *Comptes Rendus, t.* 59 (1864), p. 209—218. — (p. 40, 97).

18. M. Chasles. Questions dans lesquelles entrent des conditions multiples, telles que des conditions de double contact ou de contact d'ordre supérieur. *Comptes Rendus, t.* 59, p. 345—357.

19. A. Cayley. Sur les coniques qui touchent des courbes d'ordre quelconque. (Extrait d'une lettre à M. Chasles). *Comptes Rendus, t.* 59, p. 224—225; *Coll. Math. Papers, Vol.* 5, p. 31—32.

20. L. Cremona. Sur le nombre des coniques qui satisfont à des conditions doubles. *Comptes Rendus, t.* 59, p. 776—779 — (p. 62, 64).

21. L. Cremona. Sulla teoria delle coniche. *Ciornale di Matematiche di Battaglini, Vol.* 1 (1863), p. 225—226; *Vol.* 2 (1864), p. 17—20; *Vol.* 3 (1865), p. 60—64, 113—120.

22. E. de Jonquières. Du contact des courbes planes, et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelquonque. *Nouvelles Annales de Mathématiques,* (2) *t.* 3 (1864), p. 218—222.

22*. Th. Berner. Note sur le nombre des coniques qui touchent en cinq points une courbe du cinquième degré. *Nouvelles Annales,* (2) *t.* 5 (1866), p. 17—20.

23. H. G. Zeuthen. Nyt Bidrag til Loeren om Systemer af Keglesnit. Dissertatie, Kopenhagen, 1865; 98 p.

In Fransche vertaling:

Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques. *Nouvelles Annales,* (2) *t.* 5, p. 241—262, 289—297, 385—398, 433—443, 481—492, 529—540. — (p. 44, 46, 73).

24. H. G. Zeuthen. Analyse d'un Mémoire intitulé: Addition à la théorie des systèmes de coniques. (Extrait par l'auteur). *Comptes Rendus, t.* 62 (1866), p. 177—183.

25. N. Salvatore-Dino. Sur la théorie des systèmes de coniques. *Comptes Rendus, t.* 65 (1867), p. 499—501.

26. G. Darboux. Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre. *Comptes Rendus, t.* 67 (1868), p. 1333—1334.

27. A. Clebsch. Zur Theorie der Charakteristiken. *Mathematische Annalen, Bd.* 6 (1873), p. 1—15. — (p. 47, 99).

28. G. HALPHEN. Sur les caractéristiques, dans la théorie des coniques, sur le plan et dans l'espace, et des surfaces du second degré. *Comptes Rendus, t.* 76 (1873), p. 1074—1077. — (p. 40).

29. G. HALPHEN. Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre. *Bulletin de la Société Mathématique de France, t.* 1 (1873), p. 130—142, 226—240; *t.* 2 (1873), p. 11—33. — (p. 40, 47, 62, 65).

30. A. HURWITZ und H. SCHUBERT. Ueber den CHASLES'schen Satz $\alpha\mu + \beta\nu$. *Göttinger Nachrichten*, 1876, p. 503—517. — (p. 47).

31. CLEBSCH—LINDEMANN. Vorlesungen über Geometrie. Erster Band. Leipzig, Teubner, 1875—'76. — (p. 43, 47, 51, 57, 78, 95, 97, 98, 99, 121, 123, 124).

32. SALMON—FIEDLER. Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner, 1882. — (p. 43, 78, 97, 98, 132, 145).

33. C. F. GEISER. Ueber die Normalen der Kegelschnitte. *Crelle's Journal, Bd.* 65 (1866), p. 381—383.

33*. B. SPORER. Ueber die Anzahl der Lösungen gewisser Aufgaben und allgemeine Eigenschaften algebraischer Curven. *Zeitschrift für Math. und Physik, Bd.* 35 (1890), p. 237—246, 293—306.

34. A. WIMAN. Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welch durch Punkte, Tangenten und Normalen bestimmt sind. *Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd.* 40 (1895), p. 296—301.

(Zie ook n⁰. 3 [art. 24—73], 67, 134, 145).

D. Uitbreiding tot de ruimte.

35. M. CHASLES. Systèmes de coniques qui satisfont à sept conditions dans l'espace. *Comptes Rendus, t.* 61 (1865), p. 389—397. — (p. 62).

36. M. CHASLES. Théorie générale des systèmes de surfaces du second ordre satisfaisant à huit conditions caractéristiques des systèmes élémentaires. Expression générale du nombre des surfaces déterminées par neuf conditions quelconques. *Comptes Rendus, t.* 62 (1866), p. 405—413, errata p. 1469.

37. H. G. ZEUTHEN. Sur la détermination des caractéristiques de surfaces du second ordre. *Nouv. Annales*, (2) *t.* 7 (1868), p. 385—403. — (p. 104).

38. J. LÜROTH. Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade

im Raume schneiden. *Crelle's Journal, Bd.* 68 (1868), p. 185—190. — (p. 110).

39. H. SCHUBERT. Zur Theorie der Charakteristiken. *Crelle's Journal, Bd.* 71 (1870), p. 366—386. — (p. 110).

40. J. DE VRIES. Over het aantal kegelsneden, die acht gegeven rechten snijden. *Verslagen der Kon. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam,* 1901, p. 192—195. — (p. 110).

40*. A. A. DALHUISEN. Over eenige aantallen van kegelsneden, die aan acht voorwaarden voldoen. Dissertatie, Utrecht, van Druten, 1905; 79 p.

41. H. SCHUBERT. Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung. *Math. Annalen, Bd.* 10 (1876), p. 318—364. — (p. 55, 57, 62).

42. H. SCHUBERT. Ueber Räume zweiten Grades. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd.* 1 n⁰. 9 (1889), p. 290—310.

43. H. SCHUBERT. Kegelschnitt Anzahlen als Functionen der Raumdimension *n. Hamburger Mitteilungen, Bd.* 2 (1890) (Festschrift), p. 172—184.

44. H. SCHUBERT. Mitteilungen aus der abzählenden Geometrie *p*-dimensionaler Räume ersten und zweiten Grades. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd.* 1 (1891), p. 48—49.

45. H. SCHUBERT. Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in *n* Dimensionen. *Math. Annalen, Bd* 45 (1894), p. 153—206.

(Zie ook n⁰. 26, 28, 29, 67, 72).

E. HALPHEN'*s wijziging der* CHASLES'*sche karakteristiekentheorie.*

46. G. HALPHEN. Sur les caractéristiques des systèmes de coniques. *Comptes Rendus, t.* 83 (1876), p. 537—539. — (p. 47).

47. G. HALPHEN. Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre. *Comptes Rendus, t.* 83, p. 886—888; *Journal de l'École Polytechnique,* 45*e cahier* (1879), p. 27—89. — (p. 47).

48. G. HALPHEN. Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques. *Proceedings of the London Mathematical Society, Vol.* 9 (1878), p. 149—170; *Math. Annalen, Bd.* 15 (1879), p. 16—38. — (p. 47).

49. G. HALPHEN. Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satis-

font à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles. *Proc. of the Lond. Math. Soc., Vol.* 10 (1879), p. 76—87. — (p. 47).

50. L. SALTEL. Sur la formule indiquant le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à une cinquième condition. *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, (2) *t.* 42 (1876), p. 617—624.
51. P. DEL PEZZO. Sui sistemi di coniche. *Rendiconti dell' Accademia di Napoli, Anno* 23 (1884), p. 61—73.
52. C. BURALI-FORTI. Sui sistemi di coniche. *Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol.* 24 (1886), p. 309—333. — (p. 63).
53. C. BURALI-FORTI. Sui sistemi *i*-volte infiniti di quadriche. *Giornale di Battaglini, Vol.* 24, p. 334—345. — (p. 63).
54. C. BURALI-FORTI. Sopra il sistema di quadriche che hanno l'*n*-pla polare comune. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t.* 4 (1890), p. 118—125. — (p. 63).
55. E. STUDY. Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem. Habilitationsschrift, Leipzig, 1885; *Math. Annalen, Bd.* 27 (1886), p. 58—101. — (p. 54).
56. E. STUDY. Ueber die CREMONA'sche Charakteristikenformel. *Math. Annalen, Bd.* 27, p. 102—105.
57. H. G. ZEUTHEN. Sur la révision de la théorie des caractéristiques de M. STUDY. (Extrait d'une lettre à M. KLEIN). *Math. Annalen, Bd.* 37 (1890), p. 461—464. — (p. 55).
58. E. STUDY. Entgegnung. *Math. Annalen, Bd.* 40 (1892), p. 559—562. — (p. 55).
59. E. STUDY. Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene auf einen Punktraum. *Math. Annalen, Bd.* 40, p. 551—558. — (p. 55).
60. E. STUDY. Ueber Systeme von Kegelschnitten. *Math. Annalen, Bd.* 40, p. 563—578. — (p. 55).
61. H. G. ZEUTHEN. Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée. *Math. Annalen, Bd.* 41 (1893), p. 539—544. — (p. 55).

F. Productstellingen.

62. G. HALPHEN. Sur le nombre des droites qui satisfont à quatres conditions données. *Comptes Rendus, t.* 68 (1869), p. 142—145.

63. G. HALPHEN. Sur les droites, qui satisfont à des conditions données. *Comptes Rendus, t.* 73 (1871), p. 1441—1444; *t.* 74 (1872), p. 41—43. — (p. 60).

64. H. G. ZEUTHEN. Sur les principes de correspondance du plan et de l'espace. *Comptes Rendus, t.* 78 (1874), p. 1553—1556, spec. p. 1556. — (p. 60).

65. H. SCHUBERT. Beiträge zur abzählenden Geometrie. *Math. Annalen, Bd.* 10 (1876), p. 1—116. — (p. 40, 60, 84, 98).

66. H. SCHUBERT. Ueber geometrische Erweiterungen des BEZOUT'schen Fondamentalsatz. *Göttinger Nachrichten,* 1877, p. 401—426. — (p. 55, 61).

67. H. SCHUBERT. Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig, Teubner, 1879. — (p. 41, 42, 47, 55, 56, 58, 60, 61, 83, 84, 85, 86, 88, 92, 95, 98, 99, 100, 104, 105, 106, 118).

68. H. SCHUBERT. Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen des dreidimensionalen Satzes, dass es zwei Strahlen giebt, welche vier gegebenen Strahlen schneiden. *Hamburger Mitteilungen, Bd.* 1 n⁰. 4 (1884), p. 87. — (p. 61).

69. H. SCHUBERT. Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes. *Math. Annalen, Bd.* 26 (1886), p. 26—73.

70. H. SCHUBERT. Lösung des Charakteristikenproblems für lineare Räume beliebiger Dimension. *Hamburger Mitteilungen, Bd.* 1 n⁰. 6 (1886), p. 134—155.

71. H. SCHUBERT. Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension. *Acta Mathematica, Bd.* 8 (1886), p. 97—118.

71*. H. SCHUBERT. Beziehungen zwischen den linearen Räumen auferlegbaren charakteristischen Bedingungen. *Math. Annalen, Bd.* 38 (1891), p. 598—602.

72. H. SCHUBERT. Ueber eine Verallgemeinerung der Aufgaben der abzählenden Geometrie. *Hamburger Mitt., Bd.* 3 n⁰. 1 (1891), p. 12—20.

73. H. SCHUBERT. Beitrag zur Liniengeometrie in n Dimensionen. *Hamb. Mitt., Bd.* 3 n⁰. 2 (1892), p. 86—97.

74. M. PIERI. Sul problema degli spazi secanti. *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo,* (2) *Vol.* 26 (1893), p. 534—546; *Vol.* 27 (1894), p. 258—273; *Vol.* 28 (1895), p. 441—454.

75. F. PALATINI e G. Z. GIAMBELLI. Prodotto di due condizioni caratte-

ristiche relative ai piani di un iperspazio. *Atti della Reale Accademia di Torino, t.* 36 (1900—'01), p. 459—479.

75*. G. Z. GIAMBELLI. Risoluzione del problema degli spazi secanti. *Memorie della Reale Accad. di Torino,* (2) *t.* 52 (1903), p. 171—212. (Zie ook n°. 41).

G. Aantallen kegelsneden, die aan een onsplitsbare vijfvoudige voorwaarde voldoen.

76. O. HESSE. Ueber Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren. *Crelle's Journal, Bd.* 36 (1848), p. 143—176. — (p. 78).

77. A. CAYLEY. On the conic of five-pointic contact at any point of a plane curve. *Philosophical Transactions, Vol.* 149 (1859), p. 371—400; *Collected Math. Papers, Vol.* 4, p. 207—239.

78. A. CAYLEY. On the sextactic points of a plane curve. *Phil. Transactions, Vol.* 155 (1865), p. 545—578; *Collected Math. Papers, Vol.* 5, p. 221—257. — (p. 78).

79. A. CAYLEY. Sur les coniques déterminées par cinq conditions de contact avec une courbe donnée. *Comptes Rendus, t.* 63 (1866), p. 9—12. — (p. 75, 147).

80. W. SPOTTISWOODE. On the sextactic points of a plane curve. *Phil. Transactions, Vol.* 155 (1865), p. 653—669.

81. L. PAINVIN. Recherche des conditions pour qu'une conique ait, avec une courbe donnée, un contact d'ordre déterminé. *Comptes Rendus, t.* 78 (1874), p. 55—59, 436—438.

81*. L. PAINVIN. Condition explicite pour qu'une conique ait un contact du cinquième ordre avec une courbe donnée. *Comptes Rendus, t.* 78, p. 835—838.

82. G. HALPHEN. Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré. *Bulletin de la Soc. Math., t.* 4 (1875), p. 59—85.

83. G. BATTAGLINI. Sui punti sestatici di una curva qualunque. *Atti della Reale Accademia dei Lincei,* (4) *t.* 4_2 (1888), p. 238—246.

84. F. GERBALDI. Sui punti sestatici delle curve algebriche piane. *Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t.* 4 (1890), p. 65—66.
(Zie ook n°. 3 [art. 50, 53—73]).

H. Aantallen krommen van den derden en den vierden graad.

85. S. MAILLARD. Recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre. Thèse pour le doctorat (juillet 1870), Paris, 1871; 56 p. [1]). — (p. 84).

De voornaamste resultaten zijn hieruit medegedeeld door:

86. L. P(AINVIN). *Bulletin des sciences mathématiques,* (1) *t.* 3 (1872), p. 161—166. — (p. 84).

87. H. G. ZEUTHEN. Détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires de cubiques. *Comptes Rendus, t.* 74 (1872), p. 521—524, 604—607, 726—730. — (p. 85).

88. H. G. ZEUTHEN. Résultats d'une recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de quartiques. *Comptes Rendus, t.* 75 (1872), p. 703—706. — (p. 89).

89. H. G. ZEUTHEN. Équations de quartiques dont une partie se réduit à une droite double. *Comptes Rendus, t.* 75, p. 950—954.

90. H. G. ZEUTHEN. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementaere Systemer af fjerde Orden. *Kon. Danske Videnskabernes Selskabs, Nat. og Math.,* (5) *Bd.* 10 (1875), p. 285—394.

Gevolgd door:

Résumé du Mémoire intitulé: Recherche des propriétés générales des systèmes de courbes planes, suivie d'une application à la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires du quatrième ordre. 22 p. — (p. 85, 88, 92, 111).

91. Compte rendu par l'auteur. *Bull. des sciences mathématiques,* (1) *t.* 7 (1874), p. 97—105. — (p. 95).

92. H. SCHUBERT. Die Charakteristiken der ebenen Curven dritter Ordnung im Raume. *Göttinger Nachrichten,* 1874, p. 267—283. — (p. 83).

93. H. SCHUBERT. Die dreizehn Ausartungen und die Fundamentalzahlen der ebenen Curven dritter Ordnung mit Spitze. *Göttinger Nachrichten,* 1875, p. 359—387. — (p. 83).

94. H. SCHUBERT. Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurven nullten Geschlechts. (Zweite Abhandlung der

---

[1]) Het oorspronkelijke stuk was mij niet toegankelijk.

„Beiträge zur abzählenden Geometrie"). *Math. Annalen, Bd.* 13 (1878), p. 429—539. — (p. 83, 84, 92, 95, 111).

95. H. SCHUBERT. Beschreibung der Ausartungen der Raumcurve dritter Ordnung. *Math. Annalen, Bd.* 15 (1879), p. 529—532. — (p. 85). (Zie ook n⁰. 67).

J. Stelling $k\mu + n\nu$.

96. E. DE JONQUIÈRES. Formules exprimant le nombre des courbes d'un système d'orde quelconque, qui coupent des courbes données d'ordre également quelconque, sous des angles donnés ou sous des angles indéterminés, mais dont les bissectrices ont des directions données. *Comptes Rendus, t.* 58 (1864), p. 535—537.

97. E. DE JONQUIÈRES. Note sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certaines formules qui s'y rattachent. *Journal de Liouville,* (2) *t.* 10 (1865), p. 412—416.

98. E. DE JONQUIÈRES. Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque. *Giornale di Battaglini, Vol.* 4 (1866), p. 45—53, errata p. 212—213. — (p. 3).

99. E. DE JONQUIÈRES. Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces. *Comptes Rendus, t.* 63 (1866), p. 793—797 [1]).

100. M. CHASLES. Observations relatives à la théorie des systèmes de courbes. *Comptes Rendus, t.* 63, p. 816—821.

101. E. DE JONQUIÈRES. Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes. *Comptes Rendus, t.* 63, p. 870—874.

102. M. CHASLES. Observations au sujet de cette communication. *Comptes Rendus, t.* 63, p. 874—878.

103. M. CHASLES. Addition aux observations présentées dans la dernière séance, au sujet de la communication de M. DE JONQUIÈRES. *Comptes Rendus, t.* 63, p. 907—909.

104. E. DE JONQUIÈRES. Recherches sur les séries ou systèmes de courbes

---

[1]) In deze afdeeling hebben we den strijd tusschen CHASLES en DE JONQUIÈRES, hoofdzakelijk een prioriteitsquaestie, ondergebracht, daar deze stukken (99, 100, 101, 102, 103) moeilijk ergens anders te plaatsen waren.

et de surfaces algébriques d'ordre quelconque. Paris, Gauthier-Villars, 1866 [1]).

105. H. G. ZEUTHEN. Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes. *Math. Annalen, Bd.* 3 (1870), p. 150—156, Addition p. 323—324. — (p. 97).
(Zie ook n⁰. 12, 15, 31, 32, 67).

K. Uitbreiding tot transcendente krommen.

106. G. FOURET. Sur les systèmes de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques. *Comptes Rendus, t.* 78 (1874), p. 831—834. — (p. 2, 101).

107. G. FOURET. Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques *Bull. de la Soc. Mathématique, t.* 2 (1874), p. 72—83. — (p. 2, 101).

108. G. FOURET. Sur les courbes planes transcendantes, susceptibles de faire partie d'un système (μ, ν). *Bull. de la Soc. Math., t.* 2, p. 96—100. — (p. 2, 101).

109. G. FOURET. Du nombre des points de contact de courbes algébriques ou transcendantes d'un système avec une courbe algébrique. *Comptes Rendus, t.* 82 (1876), p. 1328—1330. — (p. 2).

110. G. FOURET. Du nombre des branches de courbes d'un système (μ, ν), qui coupent une courbe algébrique donnée, sous un angle de grandeur donnée, ou dont les bissectrices aient une direction donnée. *Comptes Rendus, t.* 83 (1876), p. 633—636.

111. G. FOURET. Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique. *Bull. de la Soc. Math., t.* 5 (1876), p. 19—24. — (p. 2).

112. G. HALPHEN. Sur les points d'une courbe ou d'une surface qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle ou au dérivées partielles. *Comptes Rendus, t.* 81 (1875), p. 1053—1055. — (p. 2).

113. G. HALPHEN. Sur la recherche des points d'une courbe algébrique

[1]) Dit was mij niet toegankelijk.

plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace. *Journal de Liouville*, (3) *t.* 2 (1876), p. 257—290, 371—408. — (p. 2, 101, 102, 103).

L. Uitbreiding tot de ruimte.

114. E. DE JONQUIÈRES. Propriétés diverses des systèmes de surfaces d'ordre quelconque. *Comptes Rendus, t.* 58 (1864), p. 567—571. — (p. 104).

115. E. DE JONQUIÈRES. Propriétés des systèmes de surfaces d'ordre quelconque. *Comptes Rendus, t.* 61 (1865), p. 440—443. — (p. 104).

116. R. STURM. Ueber Normalen an algebraische Flächen. *Math. Annalen, Bd.* 7 (1874), p. 567—582; spec. Nachtrag, p. 578—582.

117. A. BRILL. Ueber Systeme von Curven und Flächen. *Math. Annalen, Bd.* 8 (1875), p. 534—538. — (p. 104, 105).

118. H. G. ZEUTHEN. Détermination de courbes et de surfaces satisfaisant à des conditions de contact double. *Comptes Rendus, t.* 89 (1879), p. 899—902, 946—948.

119. SALMON—FIEDLER. Analytische Geometrie des Raumes. II. Dritte Auflage. Leipzig, Teubner, 1880; art. 460, p. 614—615. — (p. 104).

120. G. FOURET. Sur certains groupes de surfaces, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques. *Comptes Rendus, t.* 79 (1874), p. 467—470.

121. G. FOURET. Sur la notion des systèmes généraux de surfaces, algébriques ou transcendantes, déduite de la notion des implexes. *Comptes Rendus, t.* 80 (1875), p. 167—170.

(Zie ook n°. 67, 112, 113).

M. Aantallen krommen van den m^{den} graad.

122. A. CAYLEY. On the theory of involution. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol.* 11 Part. 1 (1866), p. 21—38; *Coll. Math. Papers, Vol.* 5, p. 295—312. — (p. 107).

123. L. CREMONA. Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane. *Annali di Matematica, t.* 6 (1864), p. 153—168. — (p. 107).

124. E. DE JONQUIÈRES. Propriétés des réseaux de courbes et de surfaces algébriques. *Comptes Rendus, t.* 67 (1868), p. 1338—1340.

125. E. DE JONQUIÈRES. Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques. *Math Annalen, Bd.* 1 (1869), p. 424—431. — (p. 107).

125*. KOEHLER. Sur les réseaux de courbes planes. *Bull. de la Soc. Mathématique, t.* 1 (1873), p. 124—129.

126. M. CHASLES. Relations entre les deux caractéristiques d'un système de courbes d'ordre quelconqne. *Comptes Rendus, t.* 62 (1866), p. 325—334. — (p. 98).

127. M. CHASLES. Sur les systèmes de courbes d'ordre quelconque; courbes exceptionnelles. *Comptes Rendus, t.* 64 (1867), p. 799—805.

128. A. CAYLEY. Sur les courbes aplaties. *Comptes Rendus, t.* 74 (1872), p. 708—712; *Coll. Math. Papers, Vol.* 8, p. 258—261.

129. L. SALTEL. Mémoire sur le principe arguesien unicursal et sur certains systèmes de courbes géométriques. *Mémoires couronnés et autres Mémoires de l'Académie royale de Belgique, t.* 23 (1873); 112 p. — (p. 96).

130. L. SALTEL. Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes de degré supérieur. *Bull. de la Soc. Math., t.* 2 (1873), p. 52—54. — (p. 96).

131. H. G. ZEUTHEN. Détermination des nombres plückeriens des enveloppes. *Comptes Rendus, t.* 78 (1874), p. 274—278, 339—342.

132. H. KREY. Ueber Systeme von Plancurven. *Acta Mathematica, Bd.* 7 (1885), p. 49—94. — (p. 92, 107, 108, 109, 110).

132*. J. DE VRIES. Over netten van algebraïsche vlakke krommen. *Versl. der Kon. Akad. van Wetensch. te Amsterdam*, 1905, p. 708—710. (Zie ook n⁰. 90, 94).

N. Correspondentieprincipe van CHASLES.

133. M. CHASLES. Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en géométrie. *Comptes Rendus, t.* 41 (1855), p. 1097—1107. — (p. 112).

134. M. CHASLES. Considérations sur la méthode générale exposée dans la séance de 15 février 1864; différences entre cette méthode et la méthode analytique; procédés généraux de démonstration. *Comptes Rendus, t.* 58 (1864), p. 1167—1175. — (p. 43, 112).

135. M. CHASLES. Sur les courbes planes ou à double courbure dont les points se peuvent déterminer individuellement. Application du principe de correspondance dans la théorie de ces courbes. *Comptes Rendus, t.* 62 (1866), p. 579–586. — (p. 96, 113).

136. M. CHASLES. Sur les courbes à points multiples dont tous les points se peuvent déterminer individuellement. Procédé général de démonstration des propriétés de ces courbes. *Comptes Rendus, t.* 62, p. 1354—1364. — (p. 96).

137. H. G. ZEUTHEN. Sur les degrés de multiplicité des solutions indiquées par le principe de correspondance, suivie d'une application de ce principe à une démonstration des relations plückeriennes. *Nouv. Annales de Math.,* (2) *t.* 6 (1867), p. 200—206. — (p. 113).

138. H. G. ZEUTHEN. Note sur le principe de correspondance. *Bull. des sciences math.,* (1) *t.* 5 (1873), p. 186—190. — (p. 113).

139. L. SALTEL. Sur une extension analytique du principe de correspondance. *Comptes Rendus, t.* 80 (1875), p. 1064–1067.

140. L. SALTEL. Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de BEZOUT. *Comptes Rendus, t.* 81 (1875), p. 884—886.

141. L. SALTEL. Application d'un théorème, complémentaire du principe de correspondance, à la détermination, sans calcul de l'ordre de multiplicité d'un point *O*, qui est un point multiple d'un lieu géométrique donné. *Comptes Rendus, t.* 81, p. 1047—1050.

142. H. SCHUBERT. Das Correspondenzprincip für Gruppen von *n* Punkten und von *n* Strahlen. *Math. Annalen, Bd.* 12 (1877), p. 180—201. (Zie ook n⁰. 12).

O. Correspondentieprincipe van CAYLEY *en* BRILL.

143. A. CAYLEY. Note sur la correspondance de deux points sur une courbe. *Comptes Rendus, t.* 62 (1866), p. 586—590; *Coll. Math. Papers, Vol.* 5, p. 542—545; *Vol.* 7, p. 39. — (p. 114).

144. A. CAYLEY. On the correspondence of two points on a curve. *Proc. of the London Math. Soc., Vol.* 1 (1866) n⁰. 7, p. 1—7; *Collected Math. Papers, Vol.* 6, p. 9—13. — (p. 114, 119, 120).

145. A. CAYLEY. Second memoir on the curves which satisfy given conditions; the principle of correspondence. *Phil. Transactions,*

Vol. 158 (1868), p. 145—172; *Coll. Math. Papers, Vol.* 6, p. 263—291. — (p. 114, 118).

146. A. BRILL. Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve. *Göttinger Nachrichten*, 1871, p. 507—518; *Math. Annalen, Bd.* 6 (1873), p. 33—65. — (p. 114, 120, 148).

147. A. BRILL. Ueber die Correspondenzformel. *Math. Annalen, Bd.* 7 (1874), p. 607—622. — (p. 114).

148. F. LINDEMANN. Extrait d'une seconde lettre, concernant l'application des intégrales abéliennes à la géométrie des courbes planes, adressée à M. HERMITE. *Crelle's Journal, Bd.* 84 (1878), p. 300—304. — (p. 123).

149. A. HURWITZ. Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip. *Leipziger Berichte*, 1886, p. 10—38; *Math. Annalen, Bd.* 28 (1887), p 561—585. — (p. 123).

150. K. BOBEK. Ueber das verallgemeinerte Correspondenzprincip. *Wiener Berichte, Bd.* 93 II (1886), p. 899—911. — (p. 118).

151. A. BRILL. Ueber algebraische Correspondenzen. *Math. Annalen, Bd.* 31 (1888), p. 374—409. — (p. 114, 117, 121).

152. A. BRILL. Ueber algebraische Correspondenzen. Zweite Abhandlung: Specialgruppen von Punkten einer algebraischen Curve. *Math. Annalen, Bd.* 36 (1890), p. 321—360.

153. H. G. ZEUTHEN. Nouvelle démonstration du principe de correspondance de CAYLEY et BRILL, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque. *Math. Annalen, Bd.* 40 (1892), p. 99—124. — (p. 118, 119, 124).

154. B. SPORER. Eine neue Ableitung des Satzes von CAYLEY—BRILL über Punktsysteme auf einer algebraischen Curve. *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd.* 39 (1894), p. 228—236. — (p. 118).

155. C. SEGRE. Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito. *Annali di Matematica*, (2) *t.* 22 (1894), p. 41—142; spec. § 12, p. 91—97.

156. H. BURKHARDT. Sur le principe de correspondance. *Comptes Rendus, t.* 126 (1898), p. 1854—1856. — (p. 124).

157. A. BRILL und M. NOETHER. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. *Jahresber. der*

Deutschen Math. Vereinigung, Bd. 3 (189 —'93), p. 109—566; spec. p. 530–565. — (p. 118, 124, 168).
(Zie ook n⁰. 31, 66, 67).

P. Formule van DE JONQUIÈRES.

158. E. DE JONQUIÈRES. Détermination du nombre des courbes d'ordre r qui ont un contact d'ordre $n\,[n < mr]$ avec une courbe donnée d'ordre m, et qui satisfont, en outre, à $\frac{r(r+3)}{2} - n$ autres conditions quelconques. *Comptes Rendus, t.* 63 (1866), p. 423–425.

159. E. DE JONQUIÈRES. Détermination du nombre des courbes du degré r qui ont deux contacts, l'un d'ordre n, l'autre d'ordre $n'\,[n + n' < mr - 1]$, avec une courbe donnée du degré m, et qui satisfont, en outre, à $\frac{r(r+3)}{2} - n - n'$ autres conditions. *Comptes Rendus, t.* 63, p. 485–488.

160. E. DE JONQUIÈRES. Détermination du nombre des courbes du degré r qui ont, avec une courbe fixe U^m du degré m, autant de contacts d'ordre quelconque qu'on le voudra, et qui satisfont, en outre, à d'autres conditions données. *Comptes Rendus, t.* 63, p. 522—526.

161. E. DE JONQUIÈRES. Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré m; suivi de quelques réflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques. *Crelle's Journal, Bd.* 66 (1866), p. 289—321. — (p. 12, 14, 39, 124, 132, 146, 147).

162. A. CAYLEY. Note sur quelques formules de M. E. DE JONQUIÈRES relatives aux courbes qui satisfont à des conditions données. *Comptes Rendus, t.* 63 (1866), p. 666—670; *Coll. Math. Papers, Vol* 7, p. 41—43. — (p. 131).

163. M. CHASLES. Remarques sur les 'questions de contact de courbes d'ordre quelconque avec une courbe donnée dont les points se déterminent individuellement. *Comptes Rendus, t.* 63, p. 670—673.
(Zie ook n⁰. 3 [art. 74—93], 146).

Q. Geslacht; singuliere punten, enz.

164. B. RIEMANN. Theorie der ABEL'schen Functionen. *Crelle's Journal, Bd.* 54 (1857), p. 115—155.

165. A. CLEBSCH. Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. *Crelle's Journal, Bd.* 64 (1865), p. 43—65. — (p. 113, 132).

166. A. CLEBSCH. Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. *Crelle's Journal, Bd.* 64, p. 98 - 100.

167. A. CAYLEY. On the transformation of plane curves. *Proc. of the London Math. Soc., Vol.* 1 (1865) n⁰. 3, p. 1 11; *Coll. Math. Papers, Vol.* 6, p. 1—8. — (p. 113).

168. J. LÜROTH. Beweis eines Satzes über rationale Curven. *Math. Annalen, Bd.* 9 (1876), p. 163—165. — (p. 114).

169. L. CREMONA. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Memorie dell' Accademia di Bologna,* (2) *t.* 2 (1862), p. 621—630; *t.* 5 (1865), p. 3—35; *Giornale di Battaglini, Vol.* 1 (1863), p. 305—311; *Vol.* 3 (1865), p. 269—280, 363 - 376. — (p. 153).

170. V. PUISEUX. Recherches sur les fonctions algébriques. *Journal de Liouville,* (1) *t.* 15 (1850) p. 365—480. — (p. 6).

171. A. CAYLEY. On the higher singularities of a plane curve. *Quart. Journ. of Math., Vol.* 7 (1866), p. 212 - 223; *Coll. Math. Papers, Vol.* 5, p. 520—528. — (p. 7, 14, 102, 117, 152).

172. M. NOETHER. Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve. *Math. Annalen, Bd.* 9 (1876), p. 166—182. — (p. 15, 155, 161, 168).

173. L. KRONECKER. Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln. *Crelle's Journal, Bd.* 91 (1881), p. 301—334. (1862 vorgetragen in der Sitzung der Berliner Akademie, 1870—'71 in einer Vorlesung). — (p. 154).

(Zie ook n⁰. 32, 135, 136).

NAAMREGISTER.

Battaglini (G.). n⁰. 83.
Berner (Th.). n⁰. 22*.
Bézout (E.). — (p. 59, 60, 62).
Bischoff (J. N.). n⁰. 11.
Bobek (K.). n⁰. 150. — (p. 118).
Brill (A.). n⁰. 117, 146, 147, 151, 152, 157. — (p. 12, 104, 105, 112, 114—118, 120, 121, 124, 148, 150, 163).
Burali-Forti (C.). n⁰. 52, 53, 54. — (p. 63).
Burkhardt (H.). n⁰. 156. — (p. 124).

Cayley (A.). n⁰. 3, 4, 19, 77, 78, 79, 122, 128, 143, 144, 145, 162, 167, 171, — (p. 3, 4, 7, 12, 14, 16—20, 22, 24, 25, 29, 32, 33, 40, 46, 47, 67, 73, 75, 78—81, 102, 104, 107, 108, 112—115, 117—120, 124, 125, 129, 131, 147, 148, 152, 170, 171, 173—175, 177, 178, 180, 188, 195, 197).
Chasles (M.). n⁰. 14, 15, 16, 17, 18, 35, 36, 100, 102, 103, 126, 127, 133, 134, 135, 136, 163. — (p. 2, 4, 12, 40—43, 47, 50, 53—55, 62—64, 69, 70, 72, 75, 89, 92, 96—101, 103, 112—114, 130, 148).
Clebsch (A.). n⁰. 27, 31, 165, 166. — (p. 43, 47, 51, 57, 63, 78, 95, 97—99, 113, 121, 123, 124, 132).
Cremona (L.). n⁰. 20, 21, 123, 169. — (p. 4, 9, 15, 62, 64, 65, 70, 107, 151, 153—160, 168, 169).

Dalhuisen (A. A.). n⁰. 40*.
Darboux (G.). n⁰. 26.
Dino (N. Salvatore-). n⁰. 25.

Fiedler (W.). n⁰. 32, 119. — (p. 26, 43, 78, 97, 98, 104, 132, 145).
Fouret (G.). n⁰. 106, 107, 108, 109, 110, 111, 120, 121. — (p. 2, 96, 101).

Geiser (C. F.). n⁰. 33.
Gerbaldi (F.). n⁰. 84.
Giambelli (G. Z.). n⁰. 75, 75*.

Halphen (G.). n⁰. 28, 29, 46, 47, 48, 49, 62, 63, 82, 112, 113. — (p. 2, 4, 5, 40, 47—52, 54, 59, 60, 62—65, 74, 84, 96, 99, 101—103).
Hesse (O.). n⁰. 76. — (p. 78).
Hurwitz (A). n⁰. 30, 149. — (p. 47, 123, 124).

Jonquières (E. de). n⁰. 12, 13, 22, 96, 97, 98, 99, 101, 104, 114, 115, 124, 125, 158, 159, 160, 161. — (p. 3, 12—16, 18, 39, 97, 100, 104, 107, 112, 113, 124—126, 128, 129, 131—137, 139—142, 145—148, 151, 162—164, 167, 168, 170, 171, 174, 178, 179, 195).

Koehler. n⁰. 125*.
Krey (H.). n⁰. 132. — (p. 5, 92, 107—111).
Kronecker (L.). n⁰. 173. — (p. 154, 168).

Lindemann (F.). n⁰. 31, 148. — (p. 43, 47, 51, 57, 78, 95, 97—99, 121—124).
Lüroth (J.). n⁰. 38, 168. — (p. 110, 114).

Maillard (S.). n⁰. 85, 86. — (p. 84).

Noether (M.). n⁰. 157, 172. — (p. 15, 118, 124, 155, 161, 168).

Painvin (L.). n⁰. 81, 81*, 86.
Palatini (F.). n⁰. 75.
Pascal (E.). — (p. 60, 100, 104).
Pezzo (P. del). n⁰. 51.
Pieri (M.). n⁰. 74.
Plücker (J.). — (p. 75, 76, 89).
Puiseux (V.). n⁰. 170. — (p. 6, 10, 14, 116, 152).

Riemann (B.). n⁰. 164. — (p. 123, 153).
Roberts (S.). — (p. 26).

Salmon (G.). n⁰. 1, 2, 32, 119. — (p. 19, 26, 43, 78, 97, 98, 104, 132, 145).
Saltel (L.). n⁰. 50, 129, 130, 139, 140, 141. — (p. 96).

Schepp (A.). — (p. 60, 100, 104).
Schubert (H.). n⁰. 30, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 71*, 72, 73, 92, 93, 94, 95, 142. — (p. 4, 5, 40—42, 47, 55—63, 69, 82—88, 90, 92—95, 98—100, 104—106, 110, 111, 118).
Segre (C.). n⁰. 155.
Sporer (B.). n⁰. 33*, 154. — (p. 118).
Spottiswoode (W.). n⁰. 80.
Steiner (J.). n⁰. 6, 7, 8, 9, 10.
Study (E.). n⁰. 55, 56, 58, 59, 60. — (p. 54, 55).
Sturm (R.). n⁰. 116.

Vries (H. de). n⁰. 5. — (p. 34, 36, 38).
Vries (J. de). n⁰. 40, 132*. — (p. 110).

Wiman (A.). n⁰. 34.

Zeuthen (H. G.). n⁰. 23, 24, 37, 57, 61, 64, 87, 88, 89, 90, 91, 105, 118, 131, 137, 138, 153. —(p. 4, 5, 44—48, 55, 60, 66, 68, 70, 73, 75, 80, 83—85, 88—93, 95, 97, 98, 104, 107, 111, 113, 118, 119, 124).

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Door STUDY en KOHN zijn voorbeelden gegeven van gevallen, waarin het SCHUBERT'sche beginsel van het behoud van het aantal niet meer doorgaat. Men kan echter ook voor die gevallen het beginsel geldig doen blijven door invoering van *oplossingen met een multipliciteit nul*, waaronder dan oplossingen te verstaan zijn, die door een kleine verandering der gegevens tot verdwijnen gebracht kunnen worden.

(G. KOHN. Ueber das Princip von der Erhaltung der Anzahl. *Archiv der Math. und Physik*, (3) *Bd.* 4 (1903), p. 312—316.

E. STUDY. Ueber das sogenannte Princip der Erhaltung der Anzahl. *Archiv der Math. und Physik*, (3) *Bd.* 8 (1905), p. 271—278).

II.

De toepassing van het beginsel van het behoud van het aantal geeft alleen dan betrouwbare resultaten als daaraan een nauwkeurig onderzoek omtrent de multipliciteit der oplossingen verbonden wordt. Deze multipliciteit kan niet met behulp van dat beginsel worden gevonden, maar daartoe moeten andere beschouwingen te hulp geroepen worden. Het bepalen van een multipliciteit in een eenvoudig geval om daaruit een algemeene conclusie te trekken is hierbij niet veroorloofd, daar a priori niet steeds te voorzien is waar de oorzaak der multipliciteit in gelegen is.

III.

Op p. 102 van zijn *Kalkül der abzählenden Geometrie* geeft SCHUBERT eenige regels omtrent de multipliciteit der degeneraties, waarvan de eerste luidt:

„*Eine Ausartung ist r^s-fach zu rechnen:*

a) wenn sie eine r-fache Ordnungsgerade hat und diese.... durch s gegebene Punkte geht."

Deze regel gaat in sommige gevallen wel, in andere gevallen niet door, doordat de oorzaak voor de multipliciteit der degeneratie niet daarin te zoeken is, dat de kromme r maal door ieder der gegeven punten gaat.

IV.

Op p. 88 van zijn *Kalkül* zegt SCHUBERT, dat bij de BRILL'sche formule

$$N = a + a' + 2cg\,,$$

voor het aantal coincidenties eener (a, a') correspontie met een waardigheid c op een kromme van het geslacht g in ieder keerpunt c coincidenties ook dan medegeteld zijn als de verbindingsstraal der coincideerende punten niet met de keerraaklijn samenvalt. In die formule is echter een in een keerpunt vallende coincidentie evengoed medegeteld als deze verbindingsstraal wel met de keerraaklijn samenvalt, hoewel dan niet c maal (zooals volgens BRILL het geval zijn zou) maar slechts c' maal, waarin c' de waardigheid der correspondentie „an sich" voorstelt.

(A. BRILL. Ueber algebraische Correspondenzen. *Math. Annalen, Bd.* 31 (1888), p. 374—409; spec. p. 404).

V.

Het uitspreken van soortgelijke correspondentiebeginsels als die van SALMON, ZEUTHEN en SCHUBERT heeft geen waarde. Alle daaruit afgeleide resultaten kunnen minstens even gemakkelijk verkregen

worden door rechtstreeksche toepassing der coincidentieformules, waarvan deze beginsels de interpretatie zijn.

(G. SALMON. Geometry of three dimensions, p. 511; SALMON—FIEDLER. Geometrie des Raumes. II. Dritte Auflage, p. 615.

H. G. ZEUTHEN. Sur les principes de correspondance du plan et de l'espace. *Comptes Rendus, t.* 78 (1874), p. 1553—1556.

H. SCHUBERT. Beiträge zur abzählenden Geometrie. *Math. Annalen, Bd.* 10 (1876), p. 1—116; spec. § 17—23, p. 57—83).

VI.

De onderzoekingen van ZIMMERMANN omtrent den invloed van hoogere singulariteiten op de PLÜCKER'sche vergelijkingen zijn zeer onvolledig en niet op de hoogte van den tijd. Terwijl ZIMMERMANN zijn resultaten uitspreekt alsof die algemeen geldig zijn, zijn deze integendeel alleen dan juist, als de singuliere punten van dien aard zijn, dat bij nadering van een door zulk een punt gaande rechte tot een der raaklijnen in dat punt nooit meer dan één enkel snijpunt tot het singuliere punt nadert.

(O. ZIMMERMANN. Neue Ableitung der PLÜCKERschen Gleichungen nebst einigen directen Bestimmungen der Doppeltangenten ebener algebraischer Curven beliebiger Ordnung. *Crelle's Journal, Bd.* 123 (1901), p. 1—32, 175—209).

VII.

De begrippen „rationale kromme" en „kromme van het geslacht nul" zijn niet identisch.

VIII.

Het logisch teekenschrift van PEANO verdient geen aanbeveling als algemeen mathematisch schrift. Het is alleen bruikbaar om de grondslagen der wiskunde aan de strengste eischen te toetsen.

IX.

De practische toepassing der beschrijvende meetkunde behoort gepaard te gaan met een stelselmatig onderzoek naar de grootte der fout, die bij de constructie gemaakt kan zijn.

X.

Er bestaan verschillende algemeene typen van ruimtekrommen van den n^{den} graad. In al die typen komen degeneraties in n elkaar op bepaalde wijze snijdende rechten voor, die de verschillende typen met elkander verbinden.

XI.

De behandelingswijze van de differentiaalvergelijking van MONGE, zooals die voorkomt in A. R. FORSYTH, A treatise on differential equations (Second edition. London, Macmillan and co., 1888, art. 229—241, p. 358—371), kan door een veel beknoptere en volledigere vervangen worden. Bovendien is de bewijsvoering van art. 238 niet geheel afdoende.

XII.

In de functietheorie verdient de beschouwing van een over een bol uitgebreid RIEMANN'sch oppervlak de voorkeur boven een vlak RIEMANN'sch oppervlak.

XIII.

De afleiding, die H. LAURENT in CH. STURM's Cours d'analyse (Paris, Gauthier-Villars, 1895), t. 2, p. 552—554 van de differentiaalvergelijking ter bepaling van de functie $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$ geeft, is niet

correct. Door vermenigvuldiging met $e^{\frac{\pi x}{2K}\sqrt{-1}}$ moet eerst de periode van $4K$ tot $2K$ gereduceerd worden.

Verder kan deze afleiding nog bekort worden door x niet met $2K'\sqrt{-1}$ maar met $K'\sqrt{-1}$ te doen toenemen.

XIV.

In een electrisch veld kunnen het ponderomotorische koppel en derhalve ook de tangentieele spanningen gevonden worden uit de verandering der electrische energie bij draaiing van één enkel bolvormig gedacht volumenelement, waardoor dus de verplaatsing, die een punt van het dielectricum ondergaat, een discontinue functie van de coördinaten van dat punt wordt.

(H. A. LORENTZ laat in een artikel in de Encyklopädie der Math. Wissenschaften, Bd. V_2, p. 107—110 slechts continue verplaatsingen toe en komt daardoor tot het besluit dat het ponderomotorische koppel geheel, de tangentieele spanningen gedeeltelijk onbepaald blijven, d. w. z. door andere overwegingen moeten worden gevonden).

XV.

Ten onrechte beschuldigt VAN DER WAALS JR. OSTWALD van inconsequentie, waar deze de kinetische verklaring der warmte een verklaring „durch etwas anderes" noemt, maar daarentegen de electromagnetische lichttheorie aanvaardt. Tusschen de hypothese, dat we ons een gas als een zwerm moleculen hebben voor te stellen, en die, volgens welke licht een electromagnetisch verschijnsel is, bestaat wel degelijk een principieel onderscheid.

(J. D. VAN DER WAALS JR. De hypothesen in de natuurkunde. Rede uitgespr. bij de aanv. van het hoogleeraarsambt aan de Univ. te Groningen op 23 Sept. 1903. Groningen, Wolters, 1903; p. 13 en 14).

De afleiding, die MAXWELL in zijn *Electricity and Magnetism*, art. 600 geeft voor de componenten der electromotorische kracht in een bewegend veld, kan achterwege blijven, daar de afleiding, die in art. 598 bij een vast assenstelsel gegeven wordt, onveranderd doorgaat als men het assenstelsel beweeglijk denkt.

Typ. De Roever Kröber & Bakels — Amsterdam.